This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 2659.05.3

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

N° D'ORDRE :

1201.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

1re THÈSE. — SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 Mai 1905 devant la Commission d'examen.

MM. PAUL APPELL, *Président.*
H. POINCARÉ, GOURSAT, *Examinateurs.*

PARIS,
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
6 et 12, rue de la Sorbonne.

1905

Digitized by Google

Math 2659.05.3

Haven fund

# UNIVERSITÉ DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

| | MM. | |
|---|---|---|
| **DOYEN** | P. APPELL | Mécanique rationnelle. |
| **DOYEN HONORAIRE** | G. DARBOUX, Professeur. | Géométrie supérieure. |
| **PROFESSEURS HONORAIRES.** | L. TROOST<br>CH. WOLF | |
| **PROFESSEURS** | LIPPMANN | Physique. |
| | BOUTY | Physique. |
| | BOUSSINESQ | Physique mathématique et Calcul des probabilités. |
| | PICARD | Analyse supérieure et Algèbre supérieure. |
| | H. POINCARÉ | Astronomie mathématique et Mécanique céleste. |
| | Y. DELAGE | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | G. BONNIER | Botanique. |
| | DASTRE | Physiologie. |
| | DITTE | Chimie. |
| | GIARD | Zoologie, Évolution des êtres organisés. |
| | KŒNIGS | Mécanique physique et expérimentale. |
| | VÉLAIN | Géographie physique. |
| | GOURSAT | Calcul différentiel et Calcul intégral. |
| | CHATIN | Histologie. |
| | PELLAT | Physique. |
| | HALLER | Chimie organique. |
| | H. MOISSAN | Chimie. |
| | JOANNIS | Chimie (Enseignement P. C. N.). |
| | JANET | Physique (Enseign$^{t}$. P. C. N.). |
| | WALLERANT | Minéralogie. |
| | ANDOYER | Astronomie physique. |
| | PAINLEVÉ | Mathématiques générales. |
| | HAUG | Géologie. |
| | P. CURIE | Physique. |
| | TANNERY | Calcul différentiel, Calcul intégral. |
| | RAFFY | Application de l'Analyse à la Géométrie. |
| | HOUSSAY | Zoologie. |
| | N | Chimie biologique. |
| | N | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| **PROFESSEURS ADJOINTS** | PUISEUX | Mécanique et Astronomie. |
| | RIBAN | Chimie analytique. |
| | LEDUC | Physique. |
| | HADAMARD | Calcul différentiel et intégral. |
| | MATRUCHOT | Botanique. |
| | MICHEL | Minéralogie. |
| | DAGUILLON | Botanique. |
| | BOUVEAULT | Chimie organique. |
| | BOREL | Théorie des fonctions. |
| **SECRÉTAIRE** | A. GUILLET. | |

*Tipografia Matematica di Palermo*, 7, via Villareale. (428.1250.11) 30-3-1905.

Digitized by Google

A

MONSIEUR PAUL APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Hommage très respectueux
et reconnaissant de son élève

R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

Digitized by Google

Mémoire extrait du tome XIX (1905), pp. 185-257, des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

Digitized by Google

SUR LES

# FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES.

## INTRODUCTION.

1. Le mode de représentation des fonctions qui se présente le premier à l'esprit est le développement en séries de puissances. Vient ensuite la représentation par séries de polynômes, séries trigonométriques et, en général, par séries de fonctions quelconques.

La représentation par séries de polynômes est un cas particulier de la représentation par *fractions continues* ou par *fractions rationnelles déterminées*.

EULER *) a le premier développé une fonction en *fraction continue*. LAGRANGE **) puis les mathématiciens du XIX^e siècle ont ensuite fait quelques pas dans cette voie difficile.

Une des tentatives les plus intéressantes a été celle de LAGUERRE ***), qui s'est efforcé de développer en fractions continues les fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle:

$$P(z) \times \frac{d.Z(z)}{dz} = Q(z) \times Z(z) + \Pi(z),$$

où $P$, $Q$, $\Pi$ sont des polynômes quelconques en $z$.

LAGUERRE n'a donné que des indications générales sur la manière de traiter le problème; il n'a étudié complètement que certains cas très particuliers. Cependant sa méthode donne effectivement, comme je le

*) EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, t. I, pp. 368-373.

**) LAGRANGE, *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral* (*Œuvres complètes*, t. IV, pp. 301-332).

***) LAGUERRE, *Œuvres*, passim.



Digitized by Google

montrerai, le développement en fractions continues des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation :

$$(1) \qquad (az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z),$$

où $a, b, c, d, p, q$ sont des constantes quelconques et $\Pi(z)$ un polynôme quelconque en $z$.

Tous les développements donnés par LAGUERRE sont des cas particuliers de celui-ci.

2. Les fractions continues algébriques sont de formes très diverses et M. PADÉ *) s'est proposé d'en faire la classification. Il a publié à ce sujet un mémoire remarquable.

3. *Développer une fonction en fraction continue, classer les fractions continues* sont deux problèmes importants, mais qui n'épuisent pas le sujet. *Non moins importante est la question de convergence* et HALPHEN **), STIELTJES ***) ont montré quels beaux résultats cette étude pouvait donner.

4. *Le principal objet de ce Mémoire est l'étude de la convergence.*

Suivant la classification de M. PADÉ, que je rappellerai brièvement, je partage les fractions continues, qu'il appelle simples, en trois classes.

Je fixe complètement les conditions de convergence des fractions continues de la *première classe*. Ces conditions dépendent de la nature de la fonction développée en fractions continues. *Les développements de cette classe convergent dans des cercles pouvant comprendre à leur intérieur les pôles de la fonction, mais limités aux points singuliers essentiels de la fonction.*

Je détermine ensuite les conditions de convergence d'une classe très étendue de fractions continues de la seconde classe. Les termes de trois réduites consécutives

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}, \qquad \frac{U_n}{V_n}, \qquad \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}$$

*) PADÉ, *Thèse.*

**) HALPHEN, *Traité des fonctions eliptiques*, tome II, p. 575.

***) STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tome VIII (1894), J: 1-122].

Digitized by Google

d'une fraction continue quelconque de cette classe — et en général de toute fraction continue algébrique — satisfont en effet à une même loi de récurrence:

$$A.U_{n+1} + B.U_n + C.U_{n-1} = 0,$$

$$A.V_{n+1} + B.V_n + C.V_{n-1} = 0,$$

où $A$, $B$, $C$ sont des polynômes en $z$ fonctions du rang $n$ des réduites.

*Dans le cas très étendu où $A$, $B$, $C$, sont des polynômes* en $z$ et $n$ [cas qui comprend les développements de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation (1) et beaucoup d'autres infiniment plus généraux] je montre que *la fraction continue représente* — sauf cas particuliers — *la fonction dans tout le plan de la variable $z$, à l'exception des points situés sur des coupures qui s'introduisent d'elles-mêmes dans les calculs.*

J'étends même les caractères de convergence des fractions continues de cette nature à des fractions continues qui ne rentrent pas dans la classification de M. Padé, mais qui ont été rencontrées cependant par divers mathématiciens, Laguerre par exemple.

Je montre enfin que *les développements de cette dernière classe se rapportant à certaines fonctions possédant deux points singuliers qui peuvent être des points critiques algébriques ou logarithmiques convergent dans tout le plan de la variable, sauf sur la coupure rectiligne joignant ces deux points.*

Dans une *troisième partie,* j'étudie les fractions continues dues à Gauss et à Lagrange et je montre qu'ordinairement elles représentent les fonctions dans tout le plan, sauf sur les coupures nécessaires à rendre ces fonctions uniformes.

Quelques-uns des résultats énoncés dans ce Mémoire ont été publiés déjà dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* *) et dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* **).

---

*) Tomes: CXXXIV (1er sem. 1902), pp. 1489-1491; CXXXVIII (1er sem. 1904), pp. 471-474; CXXXIX (2e sem. 1904), pp. 846-848.

**) Tome XXX (1902), pp. 28-36.

Digitized by Google

# PRÉLIMINAIRES.

## I. — Le tableau des fractions approchées.

5. Soit $Z(z)$ une fonction développable dans le voisinage de la valeur zéro de la variable $z$ en une série procédant suivant les puissances entières, positives et croissantes de cette variable et ne s'annulant pas pour $z = 0$:

$$Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \qquad a_0 \neq 0.$$

Soit maintenant $(p, q)$ un couple de nombres égaux ou inégaux, pris dans la suite 0, 1, 2, 3, .... Considérons l'ensemble des fractions rationnelles *irréductibles* dont le numérateur est au plus de degré $p$ et le dénominateur au plus de degré $q$. Si l'on se propose de déterminer, parmi les fractions de cet ensemble, celles qui *représentent le mieux* la fonction $Z(z)$ dans le voisinage de la valeur zéro de $z$, c'est-à-dire celles qui, $z$ étant infiniment petit, diffèrent de la fonction d'une quantité dont l'ordre infinitésimal soit supérieur ou au moins égal à celui que l'on obtient en employant une quelconque des autres fractions, on arrive à la proposition que voici, démontrée par M. Padé:

*Parmi toutes les fractions rationnelles irréductibles dont les termes ont des degrés égaux au plus à $p$ pour le numérateur, à $q$ pour le dénominateur $(p \neq q)$ il en est une $\frac{U}{V}$ qui donne une approximation dont l'ordre est supérieur à celui de l'approximation fournie par une quelconque des autres fractions.*

Ainsi, à chaque couple $(p, q)$ de nombres de la suite 0, 1, 2, 3, ... correspond *une fraction rationnelle approchée* pour la fonction $Z(z)$; ces fractions forment donc un ensemble complètement défini et se présentent comme les termes d'une suite à double entrée; pour cette raison, nous les écrirons, avec M. Padé, dans les cases d'un tableau rectangulaire, illimité à droite et en bas; les fractions d'une même file horizontale correspondront à une même valeur de $q$, celles d'une même file verticale à une même valeur de $p$. Dans la première file horizontale figurent ainsi les polynômes approchés successifs déduits de la série de puissances en-

Digitized by Google

tières qui représente $Z(z)$:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\frac{U^0_0}{V^0_0} & \frac{U^1_0}{V^0_1} & \frac{U^2_0}{V^0_2} & \frac{U^3_0}{V^0_3} & \cdots & \frac{U^p_0}{V^0_p} \\
\frac{U^0_1}{V^1_0} & \frac{U^1_1}{V^1_1} & \frac{U^2_1}{V^1_2} & \frac{U^3_1}{V^1_3} & \cdots & \frac{U^p_1}{V^1_p} \\
\frac{U^0_2}{V^2_0} & \frac{U^1_2}{V^2_1} & \frac{U^2_2}{V^2_2} & \frac{U^3_2}{V^2_3} & \cdots & \frac{U^p_2}{V^2_p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{U^0_q}{V^q_0} & \frac{U^1_q}{V^q_1} & \frac{U^2_q}{V^q_2} & \frac{U^3_q}{V^q_3} & \cdots & \frac{U^p_q}{V^q_p}
\end{array}\right|$$

comme on le voit, les indices supérieurs marquent les degrés en $z$; dans la fraction $\frac{U^p_q}{V^q_p}$, $U^p_q$ est de degré $p$ et $V^q_p$ est de degré $q$.

On peut déterminer comme il suit la fraction $\frac{U^p_q}{V^q_p}$.

Si

$$U^p_q = a_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_p z^p,$$

$$V^q_p = 1 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots + y_q z^q,$$

on écrira

$$\frac{U^p_q}{V^q_p} = \frac{a_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_p z^p}{1 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots + y_q z^q}$$

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{p+q} z^{p+q} + \lambda z^{p+q+1} + \cdots$$

ou

$$a_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_p z^p$$

$$= (1 + y_1 z + \cdots + y_q z^q)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+q-1} z^{p+q} + \lambda z^{p+q+1} + \cdots)$$

et on identifiera les coefficients de

$$z, \quad z^2, \quad z^3, \ldots, z^{p+q},$$

ce qui donnera un système de $p + q$ équations linéaires déterminant les inconnues

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_p, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots, y_q.$$

Digitized by Google

## II. — Les fractions continues déduites du tableau.

6. Aux fractions rationnelles du tableau correspondant à une fonction de la variable $z$, M. Padé fait correspondre comme il suit des fractions continues.

Il remarque que la plupart des fractions continues étudiées jusqu'à ce jour se réfèrent à 3 types principaux :

$$\mathfrak{A} = 1 + az + \cfrac{\alpha z}{1 + bz + \cfrac{\beta z}{1 + cz + \cfrac{\gamma z}{1 + \ddots}}},$$

$$\mathfrak{B} = 1 + \cfrac{\alpha z}{1 + \cfrac{\beta z}{1 + \cfrac{\gamma z}{1 + \ddots}}},$$

$$\mathfrak{C} = 1 + az + \cfrac{\alpha z^2}{1 + bz + \cfrac{\beta z^2}{1 + cz + \cfrac{\gamma z^2}{1 + \ddots}}},$$

où les quantités $a$, $\alpha$, $b$, $\beta$, ... sont des constantes.

Puis M. Padé classe d'abord les fractions continues en deux groupes définis par leurs formes

(Ier Groupe) $a_1 + \cfrac{\alpha_1}{a_2 + \cfrac{\alpha_2}{a_3 + \cfrac{\alpha_4}{\ddots}}}$ (IIème Groupe) $\cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \ddots}}}$

et après avoir rappelé qu'une réduite est la fraction rationnelle obtenue en réduisant une fraction continue limitée au quotient de deux polynômes entiers, il montre que les termes de la réduite $\frac{U_i}{V_i}$ :

Digitized by Google

$$\frac{U_i}{V_i} = a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{\ddots + \cfrac{\alpha_i}{a_i}}} \qquad (\text{I}^{\text{er}} \text{ groupe}),$$

$$\frac{U_i}{V_i} = \cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{\ddots + \cfrac{\alpha_i}{a_i}}} \qquad (\text{II}^{\text{ème}} \text{ groupe})$$

sont définis par l'unique loi de récurrence

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} = U_i \\ \alpha_i V_{i-2} + a_i V_{i-1} = V_i \end{cases} \qquad (i = 3, 4, 5, \ldots)$$

avec

$$(2) \begin{cases} U_1 = a_1, \quad V_1 = 1, \quad U_2 = a_1 a_2 + \alpha_2, \quad V_2 = a_2 \ (\text{I}^{\text{er}} \text{ groupe}) \\ U_1 = \alpha_1, \quad V_1 = \alpha_1, \quad U_2 = \alpha_1 \alpha_2, \quad V_2 = a_1 a_2 + \alpha_2 \ (\text{II}^{\text{ème}} \text{ groupe}), \end{cases}$$

d'où l'on déduit les formules:

$$(\text{I}^{\text{er}} \text{ groupe}) \begin{cases} a_1 = \dfrac{U_1}{V_1}, \quad \alpha_2 = -\dfrac{U_1 V_2 - U_2 V_1}{V_1}, \quad \alpha_i = -\dfrac{U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}} \\ a_2 = V_2, \quad a_i = \dfrac{U_{i-2} V_i - U_i V_{i-2}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}} \end{cases}_{i=3,4,\ldots}$$

$$(\text{II}^{\text{ème}} \text{ groupe}) \begin{cases} \alpha_1 = U_1, \quad \alpha_2 = \dfrac{U_1 V_2 - U_2 V_1}{U_1}, \quad \alpha_i = -\dfrac{U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}} \\ a_1 = V_1, \quad \alpha_2 = \dfrac{U_2}{V_1}, \quad a_i = \dfrac{U_{i-2} V_i - U_i V_{i-2}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}} \end{cases}_{i=3,4,\ldots}$$

Aux suites de polynômes $U$, $V$ définies par les relations (1), (2) correspond donc toujours une fraction continue; même, en effectuant certaines multiplications sur les éléments de la fraction continue, on ramène celle-ci à une fraction continue dont les éléments sont des polynômes.

M. Padé se borne alors à la considération des *fractions continues simples*, c'est-à-dire aux fractions continues dont les éléments sont de la forme

$$\alpha_1 = A_1, \qquad \alpha_i = A_i z^p, \qquad a_i = B_0 + B_1 z + \cdots + B_q z^q,$$

$$(A_1, \ldots, A_i, B_0, \ldots, B_q \text{ constantes}),$$

Digitized by Google

ce qui nécessite que *les polynômes* $U$, $V$, qui en constituent les réduites, *aient tous un terme constant non nul et que les quantités* $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ *se réduisent toutes à un monôme entier en* $z$, *ayant un coefficient différent de zéro et un degré croissant quand* $i$ *augmente.*

7. Il suit de ces propriétés qu'il *ne peut y avoir qu'une seule fraction continue simple, telle que ses réduites successives soient respectivement égales à des fractions rationnelles irréductibles données*

$$\frac{U_0}{V_0}, \quad \frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \ldots$$

et ici se pose la question : *Comment doivent être choisies, dans le tableau des fractions distinctes, des fractions pour qu'elles soient les réduites d'une fraction continue simple ?*

Il faut que : 1° *la première fraction de la suite appartienne au bord du tableau ;* 2° *les carrés contenant deux fractions consécutives quelconques soient toujours contigus ;* 3° *une fraction quelconque de la suite soit toujours plus avancée dans le tableau que celle qui précède en ce sens que la somme des indices doit aller en croissant d'une fraction à l'autre.*

Ici, M. Padé revient à la considération des types $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et appelant *fractions continues régulières* les fractions continues *simples* dont, à l'exemple de celle-ci, tous les numérateurs partiels ont le même degré, ainsi que tous les dénominateurs partiels, avec exception permises pour les éléments :

(Ier Groupe) $\quad a_1, \ \alpha_1,$

(IIème Groupe) $\quad \alpha_1, \ a_2, \ \alpha_2,$

il montre qu'on peut choisir de 3 manières différentes, et 3 seulement, des fractions du tableau de manière à obtenir les réduites successives d'une fraction continue *régulière :*

1° *En prenant des fractions consécutives situées sur une ligne horizontale ou verticale, ce qui donne la forme* $\mathfrak{A}$.

2° *En prenant des fractions consécutives situées sur la première diagonale principale, c'est-à-dire faisant partie de la suite*

$$\frac{U_0^0}{V_0^0}, \quad \frac{U_1^1}{V_1^1}, \quad \frac{U_2^2}{V_2^2}, \quad \frac{U_3^3}{V_3^3}, \ldots$$

*ou sur une parallèle à la diagonale principale, ce qui donne la forme* $\mathfrak{C}$.

Digitized by Google

3° *En procédant comme il suit: quand on passe d'une fraction à la suivante, on doit se déplacer parallèlement à l'un des bords du tableau, si l'on passe encore à la suivante, on doit se déplacer parallèlement à l'autre bord, et ainsi de suite; la forme générale du chemin est ainsi celle d'un escalier à degrés égaux ayant pour direction générale celle de la diagonale principale; les deux premières fractions de la suite doivent appartenir à la première file horizontale ou à la première file verticale. On obtient ainsi la forme* $\mathfrak{B}$.

8. Conformément à cette classification, j'étudie en premier *lieu* les fractions continues qui correspondent à des suites de fractions rationnelles consécutives toutes sur une même ligne horizontale ou verticale du tableau (forme $\mathfrak{A}$).

Les résultats obtenus pour les fractions de cette catégorie se basent sur la nature des singularités de la fonction génératrice $Z(z)$.

En second lieu, j'étudie les fractions continues qui correspondent à des suites de fractions rationnelles consécutives toutes sur une même diagonale principale (forme $\mathfrak{C}$) et j'étends les résultats à des fractions de même nature que M. Padé n'a pas considérées.

Ici, c'est par l'étude directe des relations de récurrence liant les réduites que j'arrive à fixer les conditions de convergence.

---



Digitized by Google

# PREMIÈRE PARTIE.

## LES FRACTIONS CONTINUES DE LA FORME $\mathfrak{A}$.

### CHAPITRE I.

**Les réduites sont constituées par les fractions rationnelles**

$$\frac{U_p^0}{V_0^p}, \quad \frac{U_p^1}{V_1^p}, \quad \frac{U_p^2}{V_2^p}, \quad \ldots, \quad \frac{U_p^m}{V_m^p}$$

**de la ligne horizontale de rang $p$ du Tableau des fractions approchées.**

9. La fraction rationnelle

$$\frac{U_p^m}{V_m^p} = \frac{S_0 + C_{1,m}^p z + C_{2,m}^p z^2 + \cdots + C_{m-1,m}^p z^{m-1} + C_{m,m}^p z^m}{1 - B_{1,p}^m z + B_{2,p}^m z^2 - \cdots + (-1)^i B_{i,p}^m z^i + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^m z^p}$$

est définie par cette condition : que les $m + p + 1$ premiers termes de son développement suivant les puissances entières et positives de la variable $z$ soient identiques aux $m + p + 1$ premiers termes du développement en série

$$(S) \quad S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots + S_{m+p} z^{m+p} + S_{m+p+1} z^{m+p+1} + \cdots$$

de la fonction $Z(z)$ qui correspond au Tableau des fractions $\frac{U}{V}$.

Identifions les termes du produit

$$V_m^p \times (S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots)$$

aux termes de $U_p^m$. Il vient

Digitized by Google

$$(1)\quad \begin{cases} C^p_{1,m} &= S_1 - B^m_{1,p} S_0, \\ C^p_{2,m} &= S_2 - B^m_{1,p} S_1 + B^m_{2,p} S_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C^p_{p,m} &= S_p - B^m_{1,p} S_{p-1} + \cdots + (-1)^p B^m_{p,p} S_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C^p_{p+k,m} &= S_{p+k} - B^m_{1,p} S_{p+k-1} + \cdots + (-1)^p B^m_{p,p} S_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C^p_{m,m} &= S_m - B^m_{1,p} S_{m-1} + \cdots + (-1)^p B^m_{p,p} S_{m-p}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = S_{m+1} - B^m_{1,p} S_m + \cdots + (-1)^p B^m_{p,p} S_{m-p+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = S_{m+p} - B^m_{1,p} S_{m+p-1} + \cdots + (-1)^p B^m_{p,p} S_m. \end{cases}$$

Je remarque qu'ici l'indice $p$ est un entier positif *déterminé* au lieu que l'indice $m$ varie de zéro à l'infini.

*Or,* M. HADAMARD *), à propos de recherches sur les séries, *a montré que, si les modules des pôles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ de la fonction représentée par la série $\sum_0^\infty S_n z^n$ *vérifient les inégalités*

$$(3)\quad |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \leqq \cdots \leqq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \cdots,$$

*les coefficients* $B^m_{i,p}$ *tendent, quand* $m$ *croît indéfiniment, vers des limites* $B_{i,p}$, *telles que l'on ait*

$$V^p = \lim_{m=\infty} V^p_m = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_p}\right),$$

*chaque pôle multiple devant être compté pour autant de pôles simples qu'il entre d'unités dans son degré de multiplicité.*

*Au contraire, si*

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_p| = |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \cdots,$$

*il se peut que les quantités* $B^m_{i,p}$ *tendent vers des limites qui ne soient plus les fonctions symétriques des affixes des pôles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *et même ne tendent vers aucune limite.*

*Il est donc à prévoir que, si les inégalités* (3) *sont vérifiées, le cercle*

---

*) J. HADAMARD, *La série de* TAYLOR *et son prolongement analytique,* p. 41.

Digitized by Google

*de convergence de la série*

$$(S') \qquad \frac{U_p^0}{V_0^p} + \left(\frac{U_p^1}{V_1^p} - \frac{U_p^0}{V_0^p}\right) + \left(\frac{U_p^2}{V_2^p} - \frac{U_p^1}{V_1^p}\right) + \cdots$$

*a pour rayon* $|\alpha_{p+1}|$.

10. En effet, posant

$$A_p^n = U_p^{n-1} V_n^p - U_p^n V_{n-1}^p = [S_0 + C_{1,n-1}^p z + \cdots + C_{n-1,n-1}^p z^{n-1}]$$
$$\times [1 - B_{1,p}^n z + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^n z^p] - [S_0 + C_{1,n}^p z + \cdots + C_{n,n}^p z^n]$$
$$\times [1 - B_{1,p}^{n-1} z + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^{n-1} z^p],$$

la série $(S')$ prend la forme

$$(S'') \qquad \frac{U_p^0}{V_0^p} - \frac{A_p^1}{V_0^p V_1^p} - \frac{A_p^2}{V_1^p V_2^p} - \cdots;$$

puis $A_p^n$ se réduisant à un terme monôme *) et le terme en $z^{n+p}$, seul de son espèce, étant irréductible

$$A_p^n = (-1)^{p+1} C_{n,n}^p B_{p,p}^{n-1} z^{n+p}.$$

Calculons

$$C_{n,n}^p, \quad B_{p,p}^{n-1}.$$

Éliminant $B_{1,p}^m, B_{2,p}^m, \ldots, B_{p,p}^m$ entre les équations (2) et la dernière des équations (1), il vient

$$\begin{vmatrix} S_m - C_{m,m}^p & S_{m-1} & \ldots & S_{m-p} \\ S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m+p} & S_{m+p-1} & \ldots & S_m \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$C_{m,m}^p = \frac{\begin{vmatrix} S_m & S_{m-1} & \ldots & S_{m-p} \\ S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m+p} & S_{m+p-1} & \ldots & S_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_m & S_{m-1} & \ldots & S_{m-p+1} \\ S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m+p-1} & S_{m+p-2} & \ldots & S_m \end{vmatrix}}.$$

---

*) On sait que si $\frac{U_N}{V_N}$, $\frac{U_N}{V_N}$ sont deux réduites consécutives du *tableau*, la différence $U_N P_P - U_P V_N$ se réduit à un terme monôme.

Digitized by Google

Quant à $B^m_{p,p}$, le système (2) nous donne semblablement

$$B^m_{p,p} = \pm \frac{\begin{vmatrix} S_{m+1} & S_m & \cdots & S_{m-p+2} \\ S_{m+2} & S_{m+1} & \cdots & S_{m-p+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{m+p} & S_{m+p-1} & \cdots & S_{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_m & S_{m-1} & \cdots & S_{m-p+1} \\ S_{m+1} & S_m & \cdots & S_{m-p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{m+p-1} & S_{m+p-2} & \cdots & S_m \end{vmatrix}}$$

et on en conclut

$$A^n_p = \pm \frac{\begin{vmatrix} S_n & S_{n-1} & \cdots & S_{n-p} \\ S_{n+1} & S_n & \cdots & S_{n-p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n+p} & S_{n+p-1} & \cdots & S_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{n-1} & S_{n-2} & \cdots & S_{n-p} \\ S_n & S_{n-1} & \cdots & S_{n-p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n+p-2} & S_{n+p-3} & \cdots & S_{n-1} \end{vmatrix}} ;$$

posant $n - p = k$, il s'agit donc de déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \pm \frac{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \cdots & S_{k+p} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \cdots & S_{k+p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p} & S_{k+p+1} & \cdots & S_{k+2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \cdots & S_{k+p-1} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \cdots & S_{k+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p-1} & S_{k+p-2} & \cdots & S_{k+2p-2} \end{vmatrix}} \times \frac{1}{V^p_{p+k-1} V_{p+k}} z^{2p+k}$$

ou, plus simplement, le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \pm \frac{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \cdots & S_{k+p} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \cdots & S_{k+p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p} & S_{k+p+1} & \cdots & S_{k+2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \cdots & S_{k+p-1} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \cdots & S_{k+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p-1} & S_{k+p-2} & \cdots & S_{k+2p-2} \end{vmatrix}} z^{2p+k},$$

Digitized by Google

puisqu'on a convenu de supprimer de la suite $(S')$ les fractions $\frac{U}{V}$ où $V$ s'annulerait pour la valeur de $z$ considérée.

M. HADAMARD *), recherchant un polynôme $P(z)$ tel que le produit d'une série donnée $f(z)$ par ce polynôme soit une série convergente dans un cercle de rayon supérieur au cercle de convergence de $f(z)$, a rencontré, lui aussi, ces rapports de déterminants.

Écrivant avec lui

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} S_m & S_{m+1} & \dots & S_{m+p} \\ S_{m+1} & S_{m+2} & \dots & S_{m+p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m+p} & S_{m+p+1} & \dots & S_{m+2p} \end{vmatrix},$$

nous aurons à chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \pm \frac{D_{k,p}}{D_{k,p-1}} z^{2p+k}.$$

Or, on sait, d'après CAUCHY, que ce rayon a pour expression

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[k]{\frac{|D_{k,p}|}{|D_{k,p-1}|}} = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt[k]{|D_{k,p}|}}{\sqrt[k]{|D_{k,p-1}|}}.$$

Mais si les inégalités $(z)$ sont vérifiées, on sait aussi que

$$\lim_{\infty=k} \sqrt[k]{|D_{k,p}|} = \frac{1}{|\alpha_1 \times \alpha_2 \dots \times \alpha_p|};$$

*le rayon de convergence de la série* $(S')$ *est donc bien* $(\alpha_{p+1})$.

11. CONVERGENCE UNIFORME. — *Si pour une valeur déterminée* $z_0$ *de la variable* $z$ *les suites*

$$\frac{U_p^0}{V_0^p}, \quad \frac{U_p^1}{V_1^p}, \quad \frac{U_p^2}{V_2^p}, \dots, \frac{U_p^k}{V_k^p}, \dots$$

(ligne horizontale de rang $p+1$ du tableau)

---

*) Loc. cit., p. 40.

Digitized by Google

$$\frac{U_q^0}{V_0^q}, \quad \frac{U_q^1}{V_1^q}, \quad \frac{U_q^2}{V_2^q}, \ldots, \frac{U_q^k}{V_k^q}, \ldots$$

(ligne horizontale de rang $q+1$ du tableau)

*tendent l'une et l'autre vers des limites déterminées, ces limites sont identiques.*

Il suffit de démontrer que si les fractions $\frac{U_p^k}{V_k^p}$, d'une part, $\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}}$ d'autre part, tendent vers des limites finies et déterminées quand l'indice $k$ croît indéfiniment, la différence de ces réduites tend vers zéro.

Sous ces conditions,

$$\frac{U_q^k}{V_k^q} - \frac{U_p^k}{V_k^p} = \left(\frac{U_q^k}{V_k^q} - \frac{U_{q-1}^k}{V_k^{q-1}}\right) + \left(\frac{U_{q-1}^k}{V_k^{q-1}} - \frac{U_{q-2}^k}{V_k^{q-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}} - \frac{U_p^k}{V_k^p}\right)$$

tendra en effet vers zéro.

On a

$$\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}} - \frac{U_p^k}{V_k^p} = \frac{U_{p+1}^k V_k^p - U_p^k V_k^{p+1}}{V_k^p V_k^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{V_k^p V_k^{p+1}}\{(S_0 C_{1,k}^{p+1} z + \cdots + C_{k,k}^{p+1} z^k)[1 - B_{1,p}^k z + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^k z^p]$$
$$-(S_0 + C_{1,k}^p z + \cdots + C_{k,k}^p z^k)[1 - B_{1,p+1}^k z + \cdots + (-1)^{p+1} B_{p+1,p+1}^k z^{p+1}]\}$$

$$= (-1)^p \frac{C_{k,k}^p B_{p+1,p+1}^k z^{k+p+1}}{V_k^p V_k^{p+1}}$$

$$= (-1)^p \times \frac{\begin{vmatrix} S_k & \ldots & S_{k-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k+p} & \ldots & S_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & \ldots & S_{k-p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k+p-1} & \ldots & S_k \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} S_{k+1} & \ldots & S_{k+p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k+p+1} & \ldots & S_{k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & \ldots & S_{k-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k+p} & \ldots & S_k \end{vmatrix}} \times \frac{z^{k+p+1}}{V_k^p V_k^{p+1}}$$

ou, posant $k - p + 1 = h$,

$$\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}} - \frac{U_p^k}{V_k^p} = \pm \frac{1}{V_k^p V_k^{p+1}} \times \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} \times z^{k+p+1}.$$

Pour la valeur de $z$ considérée, $V_k^p$, $V_k^{p+1}$ tendent, comme les ré-

Digitized by Google

duites, vers des limites déterminées. Il suffit donc de montrer que, pour cette valeur de $z$, $\frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} z^{h+p+1}$ tend vers zéro lorsque $k$ (ou $h$) croît indéfiniment.

Il en est bien ainsi, car la série

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} z^{h+p+1}$$

a pour rayon de convergence $|\alpha_{p+1}|$, nombre supérieur à $|z_0|$, puisque, *par hypothèse,* la suite $\frac{U_p^k}{V_k^p}$, de rayon de convergence $|\alpha_{p+1}|$, converge au point $z_0$.

12. Si la suite

$$(\sigma) \qquad \frac{U_0^0}{V_0^0}, \quad \frac{U_0^1}{V_1^0}, \quad \frac{U_0^2}{V_2^0}, \ldots, \frac{U_0^n}{V_n^0}, \ldots,$$

qui n'est autre que la suite

$$S_0, \quad S_0 + S_1 x, \quad S_0 + S_1 x + S_2 x^2, \ldots, S_0 + S_1 x + \cdots + S_n x^n, \ldots$$

du développement en séries de puissances limitées de la fonction $Z(z)$, converge dans un cercle de rayon $R$, les suites

$$(\sigma') \qquad \frac{U_p^0}{V_0^p}, \quad \frac{U_p^1}{V_1^p}, \ldots, \frac{U_p^n}{V_n^p}, \ldots$$

convergeront dans le même cercle et *y représenteront la fonction* $Z(z)$ *tout comme la suite* ($\sigma$). Il se pourra même, sous les conditions que nous allons énoncer et qui sont les conséquences immédiates de l'analyse précédente, que les suites ($\sigma'$) convergent et représentent la fonction $Z(z)$ dans des cercles de rayon $R_p > R$ :

*Étant donné une série de puissances entières positives et croissantes, représentant une fonction* $Z(z)$ *dont les pôles les plus rapprochés de l'origine sont intérieurs à un cercle* ($C$) *lui-même intérieur aux pôles suivants,* chaque pôle multiple étant compté pour autant de pôles simples qu'il existe d'unités dans son degré de multiplicité, *la fraction continue déduite de la ligne horizontale de rang p du tableau de* M. PADÉ *représente la fonction*

Digitized by Google

*$Z(z)$ dans un cercle de rayon $|\alpha_{p+1}|$, où $\alpha_{p+1}$ est l'affixe du pôle le plus rapproché de l'origine parmi tous ceux qui sont extérieurs au cercle.*

*Si tous les pôles sont simples et de modules différents, la représentation a lieu dans des cercles d'autant plus grands que la ligne horizontale choisie est plus éloignée dans le tableau.* S'il y a des pôles de même module, multiples ou non, il y a stationnement, en ce sens que plusieurs lignes horizontales consécutives représentant la fonction ont le même rayon de convergence.

*S'il y a enfin des points singuliers essentiels, le stationnement se prolonge indéfiniment; aucune des fractions continues considérées ne représente la fonction en dehors du cercle sur la circonférence duquel se trouve le point singulier essentiel le plus rapproché de l'origine.*

13. *Il se peut que la suite*

$$S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots$$

*diverge quelque petit que soit $(z)$. Le point $z = 0$ est alors un point singulier de la fonction $Z(z)$. Si ce point est pôle simple et si $\alpha_1$ est l'affixe du point singulier le plus rapproché de l'origine, la suite des fractions constituant la seconde ligne horizontale du tableau convergera dans le cercle de rayon $|\alpha_1|$, car les dénominateurs de cette suite tendront vers $z$. Si le point $z = 0$ était pôle multiple d'ordre $p$, les suites de fractions constituant les lignes horizontales de rang $> p - 1$ convergeraient seules dans le cercle de rayon $|\alpha_1|$. Enfin, si le point était point singulier essentiel, aucune des suites de réduites horizontales ne convergerait. Ces conclusions admises, on est ramené au cas général.*



Digitized by Google

## CHAPITRE II.

**Les réduites sont constituées par les fractions rationnelles**

$$\frac{U_0^p}{V_p^0}, \quad \frac{U_1^p}{V_p^1}, \quad \frac{U_2^p}{V_p^2}, \ldots, \frac{U_m^p}{V_p^m}, \ldots$$

**de la colonne verticale de rang $p+1$ du tableau.**

14. Je considère la fonction $Z(z)$

$$Z(z) = \frac{S_0\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\cdots}{\left(1-\frac{a}{z}\right)\left(1-\frac{b}{z}\right)\cdots}$$

$$= S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots = \frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots},$$

où les zéros d'une part, les pôles de l'autre, sont rangés par ordre de modules croissants. Les coefficients $t$ sont déterminés en fonction des coefficients $S$ par l'équation *identique* :

$$(S_0 + S_1 z + \cdots) \times (1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots) = S_0,$$

qui donne

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} S_1 + S_0 t_1 = 0 \\ S_2 + S_1 t_1 + S_0 t_2 = 0 \\ S_3 + S_2 t_1 + S_1 t_2 + S_0 t_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_i + S_{i-1} t_1 + S_{i-2} t_2 + \cdots + S_0 t_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Si l'on pose, par ailleurs,

$$\frac{S_0}{1 + t'_1 z + t'_2 z^2 + \cdots}$$

$$= S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots + S_m z^m + \rho z^{m+1} + \cdots \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

les constantes $t'_1, t'_2, \ldots, t'_m$ seront déterminées par le système

Digitized by Google

$$(5)\qquad \begin{cases} S_1 + S_0 t'_1 = 0 \\ S_2 + S_1 t'_1 + S_0 t'_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_m + S_{m-1} t'_1 + S_{m-2} t'_2 + \cdots + S_0 t'_m = 0 \end{cases}$$

et la comparaison avec le système (4) montre que la fraction de rang $m+1$ de la première colonne du tableau relatif à la fonction $Z(z)$ a pour expression

$$\frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_m z^m}.$$

La suite des fractions de la première colonne est donc

$$\frac{S_0}{1}, \qquad \frac{S_0}{1 + t_1 z}, \qquad \frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2}, \cdots$$

15. Il est clair que pour toute valeur de $z$ de module inférieur à $|\alpha|$, cette suite converge vers une valeur finie, déterminée et différente de zéro, exception faite pour les pôles situés à l'intérieur du cercle de rayon $|\alpha|$. Au contraire, cette suite tend constamment vers zéro quand $z$ est à l'extérieur du cercle de rayon $|\alpha|$.

On peut faire un raisonnement identique pour la colonne verticale constituée par les réduites de rang $p+1$, en se basant sur ce fait que les zéros et les pôles de la série

$$S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots$$

sont pôles et zéros de la série

$$\frac{1}{S_0} + \frac{t_1}{S_0} z + \frac{t_2}{S_0} z^2 + \cdots.$$

En effet, si l'on pose d'une part

$$(6)\qquad \frac{S_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_p z^p}{1 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n} = S_0 + S_1 z + \cdots + S_{n+p} z^{n+p} + \lambda z^{n+p+1}$$

(je dis « poser » pour indiquer que $A_1, A_2, \ldots, A_p, u_1, \ldots, u_n$ sont déterminés par la condition que $S_0, S_1, \ldots, S_{n+p}$ soient les coefficients des $n+p$ premiers termes des développements de la fraction rationnelle) et d'autre part

Digitized by Google

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+v_1z+v_2z^2+\cdots+v_nz^n}{S_0+B_1z+B_2z^2+\cdots+B_pz^p}\\ &=\frac{1}{S_0}+\frac{t_1}{S_0}z+\frac{t_2}{S_0}z^2+\cdots+\frac{t_{n+p}}{S_0}z^{n+p}+\mu z^{n+p+1}+\cdots,\end{aligned}\right.$$

on a identiquement

$$v_i=u_i,\qquad B_j=A_j,\ \ldots\qquad (i=1,2,\ldots,n),\ (j=1,2,\ldots,p).$$

Ce *lemme* résulte de ce que

$$\frac{S_0}{1+t_1z+t_2z^2+\cdots+t_{n+p}z^{n+p}+\mu z^{n+p+1}+\cdots}$$
$$=S_0+S_1z+S_2z^2+\cdots+S_{n+p}z^{n+p}+\lambda z^{n+p+1}+\cdots,$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{S_0+B_1z+B_2z^2+\cdots+B_pz^p}{1+v_1z+v_2z+\cdots+v_nz^n}=\frac{S_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_pz^p}{1+u_1z+u_2z^2+\cdots+u_nz^n}.$$

Nous en concluons la proposition que voici :

*La suite des réduites constituant la colonne de rang $p+1$ du tableau se comporte comme la suite des réduites formant la ligne horizontale de rang $p+1$, à cette différence près qu'ici les cercles de convergence sont les cercles passant par les zéros de la fonction représentée par la série et qu'en dehors de ces cercles la suite des réduites tend vers zéro, au lieu de tendre vers l'infini.*

*En effet,* on peut déterminer la réduite

$$\frac{S_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_pz^p}{1+u_1z+u_2z^2+\cdots+u_nz^n}$$

en posant

$$\frac{S_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_pz^p}{1+u_1z+u_2z^2+\cdots+u_nz^n}=\frac{S_0}{1+t_1z+t_2z^2+\cdots+t_{n+p}z^{n+p}+\mu z^{n+p+1}+\cdots}$$

ou

$$\frac{1+u_1z+u_2z^2+\cdots+u_nz^n}{S_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_pz^p}$$
$$=\frac{1}{S_0}+\frac{t_1z}{S_0}+\frac{t_2z^2}{S_0}+\cdots+\frac{t_{n+p}z^{n+p}}{S_0}+\frac{\mu z^{n+p+1}}{S_0}+\cdots.$$

*Cela ramène l'étude de la suite des réduites de la colonne verticale de rang*

Digitized by Google

*p à l'étude de la suite des réduites de la ligne horizontale de rang p du tableau correspondant à la série*

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{t_i}{S_0} z_i = \frac{1}{S_0} \sum_{0}^{\infty} t_i z^i .$$

*La suite des réduites d'une colonne verticale quelconque ne saurait prolonger la fonction en dehors du cercle dont la circonférence passe par le point singulier essentiel le plus proche de l'origine, puisque si le point $\alpha$ est point singulier essentiel pour la fonction $Z(z)$ il l'est aussi pour la fonction $\frac{1}{Z(z)}$.* Dans certains cas, il y aura évidemment lieu de préférer les suites de réduites verticales aux suites de réduites horizontales. C'est ainsi que la première colonne verticale du tableau relatif à la fonction $\frac{\log(2+z)}{(1-z)^3}$ donnera un développement convergent dans le cercle de rayon 2, tandis que la première ligne horizontale donnerait un développement convergeant dans le cercle de rayon 1 seulement.

---

Digitized by Google

# DEUXIÈME PARTIE.

## LES FRACTIONS CONTINUES DE LA FORME $\mathfrak{C}$.

### CHAPITRE I.

**Forme générale des relations de récurrence existant entre les termes de trois réduites consécutives d'une fraction continue de la deuxième classe. Extension aux fractions complémentaires.**

#### I. — Fractions de la deuxième classe ordinaire.

16. De telles suites de réduites sont de la forme (cf. le tableau des fractions approchées)

$$(1) \qquad \frac{U_0^p}{V_p^0}, \quad \frac{U_1^{p+1}}{V_{p+1}^1}, \quad \frac{U_2^{p+2}}{V_{p+2}^2}, \cdots \quad (p = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(2) \qquad \frac{U_q^0}{V_0^q}, \quad \frac{U_{q+1}^1}{V_1^{q+1}}, \quad \frac{U_{q+2}^2}{V_2^{q+2}}, \cdots \quad (q = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

17. Nous allons considérer 3 réduites consécutives de la suite (1)

$$\frac{U_{n-1}^{p+n-1}}{V_{p+n-1}^{n-1}}, \quad \frac{U_n^{p+n}}{V_{p+n}^n}, \quad \frac{U_{n+1}^{p+n+1}}{V_{p+n-1}^{n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{U_{p+n-1}}{V_{n-1}}, \quad \frac{U_{p+n}}{V_n}, \quad \frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}},$$

ce qui n'offre aucune ambiguité si l'on se rappelle que les fractions appartiennent à la diagonale au-dessus de la première diagonale et de rang $p$, qu'elles sont consécutives et que les indices marquent les degrés en $z$ des polynômes $U$, $V$.

Digitized by Google

Si ces fractions représentent une fonction

$$Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

on aura par définition

$$\frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_{p+n}}{V_n} = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+2n+2} z^{p+2n+2} + \lambda z^{p+2n+3} + \cdots)$$

$$- (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+2n} z^{p+2n} + \mu z^{p+2n-1} + \cdots) = \rho z^{p+2n+1} + \cdots,$$

d'où

$$U_{p+n+1} V_n - U_{p+n} V_{n+1} = V_n V_{n+1} (\rho z^{p+2n+1} + \cdots).$$

Or le premier membre de cette relation est un polynôme en $z$ de degré $p + 2n + 1$; donc le deuxième membre se réduit à son terme de moindre degré en $z$ et

$$(3) \qquad U_{p+n+1} V_n - U_{p+n} V_{n+1} = \sigma(n) z^{p+2n+1},$$

où $\sigma(n)$ est un polynôme en $n$, qu'on obtiendrait en faisant $z = 1$.

Changeant $n$ en $n - 1$,

$$U_{p+n} V_{n-1} - U_{p+n-1} V_n = \sigma(n-1) z^{p+2n-1}.$$

Éliminant $z$ entre cette relation et la précédente, il vient

$$\sigma(n)(U_{p+n+1} V_n - U_{p+n} V_{n-1}) - \sigma(n) z^2 (U_{p+n} V_{n-1} - V_n U_{p+n-1}) = 0,$$

ou, quel que soit $B_n$, fonction de $n$ et de $z$,

$$V_n [\sigma(n-1) U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \sigma(n) z^2 U_{p+n-1}]$$
$$- U_{p+n} [\sigma(n-1) V_{n+1} + B_n V_n + \sigma(n) z^2 V_{n-1}] = 0.$$

Si $B_n$ est déterminé par cette condition que

$$\sigma(n-1) U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \sigma(n) z^2 U_{p+n-1} = 0,$$

on aura semblablement

$$\sigma(n-1) V_{n+1} + B_n V_n + \sigma(n) z^2 V_{n-1} = 0.$$

Ainsi, *il existe une même relation de récurrence entre les numérateurs et les dénominateurs de 3 fractions consécutives appartenant à une diagonale principale située au-dessus de la première diagonale principale ou, ceci est un cas particulier, appartenant à cette première diagonale principale même.*

Digitized by Google

Cette proposition est un cas particulier d'une proposition que nous avons rappelée au début.

18. *Réciproquement,* considérons six polynômes

$$U_{p+n+1}, \quad U_{p+n}, \quad U_{p+n-1}, \quad V_{n+1}, \quad V_n, \quad V_{n-1}$$

liés par des rélations de récurrence

$$A_n U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + C_n U_{p+n-1} = 0,$$
$$A_n V_{n+1} + B_n V_n + C_n V_{n-1} = 0,$$

où $A_n$, $B_n$, $C_n$ sont des polynômes en $z$ fonctions de $n$. Sous quelles conditions les fractions $\frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}}$, $\frac{U_{p+n}}{V_n}$, $\frac{U_{p+n-1}}{V_{n-1}}$ *seront-elles fractions consécutives d'une même diagonale principale d'un tableau de* M. Padé?

Éliminons $B_n$ entre les relations précédentes; il vient

$$A_n(U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n+1}) = C_n(U_{p+n}V_{n-1} - U_{p+n-1}V_n);$$

changeant $n$ en $n-1$,

$$A_{n-1}(U_{p+n}V_{n-1} - U_{p+n-1}V_n) = C_{n-1}(U_{p+n-1}V_{n-2} - U_{p+n-2}V_{n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_1(U_{p+2}V_1 - U_{p+1}V_2) = C_1(U_{p+1}V_{n-2} - U_{p+n-2}V_{n-1})$$

et, par multiplication,

$$U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n+1} = \frac{C_n C_{n-1} \cdots C_1}{A_n A_{n-1} \cdots A_1}(U_{p+1}V_0 - U_p V_1).$$

Or, si

$$\frac{U_{p+1}}{V_1} = \frac{U_1^{p+1}}{V_{p+1}^1} = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+2} z^{p+2} + \lambda z^{p+3} + \cdots,$$

$$\frac{U_p}{V_0} = \frac{U_0^p}{V_p^0} = a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p + \mu z^{p+1} + \cdots,$$

on aura

$$\frac{U_{p+1}}{V_1} - \frac{U_p}{V_0} = \rho z^{p+1} + \cdots,$$

d'où

$$U_{p+1}V_0 - U_p V_1 = (\rho z^{p+1} + \cdots) V_0 V_1 = \omega(n) z^{p+1},$$

Digitized by Google

par raison d'homogénéité, d'où

$$U_{p+n+1} V_n - U_{p+n} V_{n+1} = \frac{C_n C_{n-1} \dots C_1}{A_n A_{n-1} \dots A_1} \omega(n) z^{p+1}.$$

Mais (3) cette expression doit être de la forme $\sigma(n) z^{p+2n+1}$; il vient donc, en posant

$$\frac{C_n}{A_n} = J_n, \qquad \frac{\sigma(n)}{\omega(n)} = \theta(n),$$

$$J_n J_{n-1} \dots J_1 = \theta(n) z^{2n},$$

et, de même,

$$J_{n-1} J_{n-2} \dots J_1 = \theta(n-1) z^{2n-2},$$

d'où

$$J_n = \frac{\theta(n)}{\theta(n-1)} z^2 = \frac{C_n}{A_n}.$$

Ainsi $C_n$ est de la forme

$$C_n = \Pi(n) z^2 A_n$$

*et les relations de récurrence sont de la forme*

$$A_n U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \Pi(n) z^2 A_n U_{p+n-1} = 0,$$

$$A_n V_{n+1} + B_n V_n + \Pi(n) z^2 A_n V_{n-1} = 0.$$

D'ailleurs, si $A_n$ est de degré $h$ en $z$, $B_n$ sera de degré $h+1$, par raison d'homogénéité. Même dans les fractions du type $(C)$ que nous considérons plus spécialement, $A_n$ et $B_n$ sont de degrés respectifs 0 et 1 en $n$.

Enfin, il est évident qu'une relation de même forme existe entre les réduites de la suite (2), correspondant à une diagonale située au-dessous de la première diagonale principale.

## II. — Fractions de deuxième classe complémentaires.

19. *Le tableau complémentaire.*

On peut construire un tableau analogue à celui de M. Padé en partant du développement suivant la puissance décroissante de la variable :

$$Z(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots.$$

Soit encore

$$Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$



Digitized by Google

et

$$\frac{U_p(z)}{V_q(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{p+q} z^{p+q} + \lambda z^{p+q+1} + \cdots,$$

on aura

$$(1) \quad \frac{U_p\left(\frac{1}{z}\right)}{V_q\left(\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{p+q}}{z^{p+q}} + \frac{\lambda}{z^{p+q+1}} + \cdots = \frac{z^q U_{p,1}(z)}{z^p V_{q,1}(z)}$$

et aussi

$$Z\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Ainsi les fractions

$$\frac{z^q U_{p,1}(z)}{z^p V_{q,1}(z)}$$

sont des fractions approchées de la fonction $Z\left(\frac{1}{z}\right) = \zeta(z)$, au sens de ce mot défini par la relation (1). Nous appellerons ces fractions: *fractions complémentaires.*

20. *Loi de récurrence liant les termes de fractions complémentaires consécutives.*

Considérons une suite de fractions approchées consécutives du Tableau de M. Padé appartenant à une diagonale principale située au-dessus de la première diagonale:

$$\frac{U_{p+n-1}}{V_{n-1}}, \qquad \frac{U_{p+n}}{V_n}, \qquad \frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}}$$

et liées par la relation de récurrence

$$(2) \quad \begin{cases} A_n U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \Pi(n) z^2 A_n U_{p+n-1} = 0 \\ A_n V_{n+1} + B_n V_n + \Pi(n) z^2 A_n V_{n-1} = 0. \end{cases}$$

On aura aussi

$$A_n\left(\frac{1}{z}\right) U_{p+n+1}\left(\frac{1}{z}\right) + B_n\left(\frac{1}{z}\right) U_{p+n}\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$+ \Pi(n) \frac{1}{z^2} A_n U_{p+n-1}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

Digitized by Google

et si $A_n$, $B_n$ sont respectivement de degrés $h$ et $h+1$ en $z$,

$$A_{n,1}\,U_{p+n+1,1} + B_{n,1}\,U_{p+n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,U_{p+n-1} = 0\,,$$

où

$$A_{n,1}(z) = z^h A_n\left(\frac{1}{z}\right),\quad B_{n,1}(z) = z^{h+1} B_n\left(\frac{1}{z}\right),\quad U_{k,1}(z) = z^k U_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

et de même

$$A_{n,1}\,V_{n+1,1} + B_{n,1}\,V_{n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,V_{n-1} = 0,$$

les fractions approchées étant

$$\frac{z^n U_{p+n,1}}{z^{p+n} V_{n,1}} = \frac{U_{p+n,1}}{z^p V_{n,1}}\,.$$

Dans les relations de récurrence en question

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{n,1}\,U_{p+n+1,1} + B_{n,1}\,U_{p+n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,U_{p+n-1,1} &= 0,\\ A_{n,1}\,V_{n+1,1} + B_{n,1}\,V_{n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,V_{n-1,1} &= 0,\end{aligned}\right.$$

les polynômes $A_{n,1}$, $B_{n,1}$ sont respectivement de degrés $h$ et $h+1$.

Pour une suite de fraction appartenant à une diagonale principale située au-dessous de la première diagonale principale, on aurait semblablement

$$A_{n,1}\,U_{n+1,1} + B_{n,1}\,U_{n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,U_{n-1,1} = 0\,,$$

$$A_{n,1}\,V_{q+n+1,1} + B_{n,1}\,V_{q+n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,V_{q+n-1,1} = 0\,,$$

les fractions approchées étant $\dfrac{z^q U_{n,1}}{V_{p+n,1}}$.

Enfin, pour la première diagonale principale, on aurait

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{n,1}\,U_{n+1,1} + B_{n,1}\,U_{n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,U_{n-1,1} &= 0,\\ A_{n,1}\,V_{n+1,1} + B_{n,1}\,V_{n,1} + \Pi(n)\,A_{n,1}\,V_{n-1,1} &= 0,\end{aligned}\right.$$

les fractions approchées étant $\dfrac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$.

21. *Si l'on a obtenu la relation* (4) *définissant les fractions approchées* (*tableau complémentaire,* première diagonale principale) *d'une fonction*

$$Z_1(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

Digitized by Google

*les relations*

$$(5)\qquad \begin{cases} A_n U_{n+1} + B_n U_n + \Pi(n) z^2 U_{n-1} = 0 \\ A_n V_{n+1} + B_n V_n + \Pi(n) z^2 V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

*définiront les fractions approchées* (tableau de M. PADÉ, première diagonale principale) *de la fonction*

$$Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z).$$

En effet (1)

$$\frac{U_{p,1}(z)}{V_{p,1}(z)} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{2p}}{z^{2p}} + \frac{\lambda}{z^{2p+1}} + \cdots,$$

d'où

$$\frac{U_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)}{V_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^p \times U_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)}{z^p \times V_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{U_p(z)}{V_p(z)}$$

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{2p} z^{2p} + \lambda z^{2p+1} + \cdots.$$

D'ailleurs

$$Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots.$$

*De même, si l'on a obtenu les relations* (3) *définissant des fractions approchées complémentaires d'une fonction* $Z_1(z)$, *les relations* (2) *définiront les fractions approchées ordinaires de la fonction* $Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z)$.

22. *Forme des fractions continues complémentaires de deuxième classe.* Les termes des réduites de toute fraction continue

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}$$

sont liés par la loi de récurrence

$$U_{n+1} - b_{n+1} U_n - a_{n+1} U_{n-1} = 0$$

$$V_{n+1} - b_{n+1} V_n - a_{n+1} V_{n-1} = 0.$$

Digitized by Google

Dans le cas qui nous occupe, si $A_{n,1}$, $B_{n,1}$ sont respectivement de degrés 0 et 1 en $z$ et si

$$\frac{B_{n,1}}{A_{n,1}} = -(a_n z + b_n), \qquad \Pi(n) = -C_n,$$

la fraction continue correspondant à la relation sera de la forme

$$F = \cfrac{\gamma_1}{\beta_1 + \cfrac{\gamma_2}{\alpha_2 z + \beta_2 + \cfrac{\gamma_3}{\alpha_3 z + \beta_3 + \cfrac{\gamma_4}{\ddots}}}},$$

les relations de récurrence étant

$$(A) \qquad \begin{cases} U_{n+1} - (a_n z + b_n) U_n - c_n U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - (a_n z + b_n) V_n - c_n V_{n-1} = 0; \end{cases}$$

d'ailleurs les réduites de la fraction continue $F$ correspondant aux lois de récurrence $(A)$ vérifient les relations

$$U_{n+1,1} - (\alpha_n z + \beta_n) U_{n,1} - \gamma_n U_{n-1,1} = 0,$$
$$V_{n-1,1} - (\alpha_n z + \beta_n) V_{n,1} - \gamma_n V_{n-1,1} = 0;$$

donc

$$F = \cfrac{\gamma_1}{\beta_1 + \cfrac{\gamma_2}{\beta_2 + \cfrac{c_2}{a_2 z + b_2 + \cfrac{c_3}{a_3 z + b_3 + \cfrac{c_3}{\ddots}}}}}.$$

Un calcul facile donne les termes $\gamma_1$, $\beta_1$, $\gamma_2$, $\beta_2$ en fonction de $U_{0,1}$, $U_{1,1}$, $V_{0,1}$, $V_{1,1}$, en sorte que

$$F = \cfrac{U_{0,1}}{V_{0,1} + \cfrac{V_{1,1} - V_{0,1}\dfrac{U_{1,1}}{V_{1,1}}}{\dfrac{U_{1,1}}{U_{0,1}} + \cfrac{c_2}{a_2 z + b_2 + \cfrac{c_3}{a_3 z + b_3 + \cfrac{c_4}{\ddots}}}}}.$$

Digitized by Google

### III. — Relations entre les aires de convergences des fractions ordinaires et des fractions complémentaires de deuxième classe.

23. L'étude de la convergence d'une suite de fractions $\frac{U_n}{V_n}$ sera basée sur l'étude de la convergence de la série

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} + \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots$$

et en particulier sur l'étude du rapport

$$\left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} + \frac{U_n}{V_n}\right) : \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right).$$

Si le module de ce rapport tend vers une limite *moindre que* UN, la série et la suite des fractions convergent.

*Si ce rapport tend vers* UN, il y a doute. En ce cas, l'étude directe de la fonction dont les fractions $\frac{U_n}{V_n}$ sont des représentations approchées permet parfois de lever le doute.

24. Comme on l'a vu, il existe une relation simple entre les développements en fractions continues de deuxième classe ordinaires et complémentaires des fonctions $Z_1(z)$ et $Z(z) = Z_1\left(\frac{1}{z}\right)$.

*Il existe aussi une relation simple entre les aires de convergence de ces développements.*

Soit en effet $\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$ des fractions approchées complémentaires (première diagonale) d'une fonction $Z_1(z)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} A_{n,1} U_{n+1,1} + B_{n,1} U_{n,1} + \Pi(n) A_{n,1} U_{n-1,1} = 0 \\ A_{n,1} V_{n+1,1} + B_{n,1} V_{n,1} + \Pi(n) A_{n,1} V_{n-1,1} = 0 \end{cases}$$

et $\frac{U_n}{V_n}$ les fractions approchées ordinaires correspondantes de la fonction $Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z)$:

$$(2) \qquad \begin{cases} A_n U_{n+1} + B_n U_n + \Pi(n) z^2 A_{n,1} U_{n-1} = 0, \\ A_n V_{n+1} + B_n V_n + \Pi(n) z^2 A_{n,1} V_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Considérons les deux suites

$$(3)\qquad \frac{U_{0,1}}{V_{0,1}} + \left(\frac{U_{1,1}}{V_{1,1}} - \frac{U_{0,1}}{V_{0,1}}\right) + \left(\frac{U_{2,1}}{V_{2,1}} - \frac{U_{1,1}}{V_{1,1}}\right) + \cdots$$

$$(4)\qquad \frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots$$

et les rapports

$$R_1(z) = \left(\frac{U_{n+1,1}}{V_{n+1,1}} - \frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}\right) : \left(\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}} - \frac{U_{n-1,1}}{V_{n-1,1}}\right)$$

$$= \frac{U_{n+1,1}V_{n,1} - U_{n,1}V_{n+1,1}}{U_{n,1}V_{n-1,1} - U_{n-1,1}V_{n,1}} \times \frac{V_{n,1}V_{n-1,1}}{V_{n+1,1}V_{n,1}} = \Pi(n)\frac{V_{n,1}V_{n-1,1}}{V_{n+1,1}V_{n,1}}$$

$$R_2(z) = \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right) : \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right) = \Pi(n) z^2 \frac{V_n V_{n-1}}{V_{n+1} V_n},$$

car les relations (1), (2) donnent respectivement par élimination de $B_{n,1}$, $B_n$ :

$$U_{n+1,1} . V_{n,1} - V_{n+1,1} U_{n,1} = \Pi(n) \times (U_{n,1} V_{n-1,1} - V_{n,1} U_{n-1,1})$$

$$U_{n+1} . V_n - V_{n+1} U_n = z^2 \Pi(n) \times (U_n V_{n-1} - V_{n-1} U_n).$$

Les relations

$$U_{n,1}(z) = z^n U_n\left(\frac{1}{z}\right), \qquad V_{n,1}(z) = z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

permettent d'écrire

$$R_1(z) = \Pi(n) \frac{z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right) \times z^{n-1} V_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1} V_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \Pi(n) . \frac{1}{z^2} \times \frac{V_n\left(\frac{1}{z}\right) . V_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)}{V_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) . V_n\left(\frac{1}{z}\right)} = R_2\left(\frac{1}{z}\right).$$

Il s'ensuit que, *si les suites de fractions* (1) représentant la fonction $Z_1(z)$ *convergent pour la valeur* $z_0$ *de la variable, les suites de fractions*

Digitized by Google

(2) *qui représentent la fonction* $Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z)$ *convergent pour la valeur* $\frac{1}{z_0}$ *de la variable, et réciproquement.*

Si la suite (1) converge dans l'aire $A(x, y)$, c'est-à-dire converge en tous les points $z_0 = x_0 + iy_0$ de cette aire, la suite (2) qui représente la fonction $Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z)$ convergera aux points

$$\frac{1}{x_0 + iy_0} = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{iy_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

de cette aire, c'est-à-dire dans l'aire

$$A\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-iy}{x^2 + y^2}\right) = A_1(x, y).$$

En particulier, si l'aire de convergence $A(x, y)$ relative à la fonction $Z_1(z)$ comprend tout le plan, sauf les points d'un arc de courbe $f(x, y) = 0$, l'aire de convergence $A_1$ relative à la fonction $Z(z)$ comprendra tout le plan, sauf les points de l'arc $f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = 0$ transformé du premier arc par rayons vecteurs réciproques, le pôle de *transformation étant à l'origine et la puissance étant* UN.

## CHAPITRE II.

### Étude d'un cas particulier.

25. LAGUERRE a étudié le développement en fractions continues des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \qquad W \times \frac{d.Z(z)}{dz} = V \times Z(z) + U,$$

où $W$, $V$, $U$ sont des polynômes en $z$.

Il part de l'identité, supposée vérifiée,

$$Z(z) = \frac{\varphi_n(z)}{f_n(z)} + \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

où $\varphi(z)$, $f(z)$ sont l'un et l'autre des polynômes en $z$ de degré $n$ et

Digitized by Google

où $\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$ désigne une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable $z$ commençant par un terme de degré $-(2n+1)$ et il montre que $f(z)$ doit vérifier une équation différentielle de second ordre : de cette équation, il déduit une loi de récurrence entre les polynômes $f_{n+2}(z)$, $f_{n+1}(z)$, $f_n(z)$. On sait d'ailleurs que les polynômes $\varphi_{n+2}(z)$, $\varphi_{n+1}(z)$, $\varphi_n(z)$ vérifient la même loi de récurrence. Cette loi de récurrence conduit au développement en fraction continue de la fonction $Z(z)$.

A dire vrai, LAGUERRE n'a appliqué son procédé qu'à des fonctions très simples, telles que $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\omega}$ (constante quelconque) (cf. § 42), vérifiant toutes l'équation particulière :

$$(2) \qquad (az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z),$$

où $a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$ sont des constantes arbitraires et $\Pi(z)$ un polynôme quelconque et il n'a même pas donné le développement en fraction continue des fonctions vérifiant l'équation (2).

Suivant les indications que LAGUERRE a laissées, je donne d'abord ce développement. Puis, prenant comme point de départ les relations de récurrence existant entre les numérateurs et les dénominateurs de 3 réduites consécutives quelconques, *je montre que le développement est valable dans tout le plan de la variable $z$, sauf pour les points situés sur la coupure joignant les points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ qui sont points singuliers pour la fonction $Z(z)$.*

**I. — Développement en fraction continue de la fonction vérifiant l'équation différentielle :**

$$(2) \qquad (az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z),$$

**où $a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$ sont des constantes quelconques et $\Pi(z)$ un polynôme en $z$.**

26. Nous supposons que $Z(z)$ est développable suivant les puissances négatives de la variable :

$$Z(z) = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots.$$



Digitized by Google

Déterminons avec LAGUERRE deux polynômes de degré $n$, $U_n$, $V_n$ par la condition que les $2n+1$ premiers termes du développement

$$S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z_2} + \cdots$$

*de la fraction* rationnelle $\frac{U_n}{V_n}$ soient identiques aux $2p+1$ premiers termes du développement de $Z(z)$, en sorte que

$$(3) \qquad Z(z) = \frac{U_n}{V_n} + \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

où $\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$ répresente une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de $z$, commençant par un terme en $\frac{1}{z^{2n+1}}$.

Les polynômes $U_n$, $V_n$ peuvent être déterminés, une fois le développement de $z$ connu, par l'identification du polynôme $U_n$ au produit

$$V_n \times \left(S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{M_1}{z^{2n+1}} + \frac{M_2}{z^{2n+2}} + \cdots\right).$$

On déduit de (3)

$$Z'(z) = \frac{VU' - UV'}{V^2} + \left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right)$$

et, portant ces valeurs de $Z(z)$ et $Z'(z)$ dans (2), il vient

$$(az+b)(cz+d)\frac{VU' - UV'}{V^2} - (pz+q)\frac{U}{V} - \Pi(z)$$

$$= (pz+q)\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) - (az+b)(cz+d)\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

$$(az+b)(cz+d)(VU' - UV') - (pz+q)UV - \Pi(z)V^2 = \left(\frac{1}{z^{2n}}\right)V^2.$$

Changeant $z$ en $\frac{1}{z}$,

$$\frac{1}{z^{2n+1}}(a+bz)(c+dz)(V_1U_2 - U_1V_2)$$

$$-\frac{1}{z^{2n+1}}(p+qz)U_1V_1 - \frac{\Pi_1(z)}{z^{n+2n}}V_1^2 = \frac{1}{z^{2n}}V_1^2(z^{2n}),$$

où l'on a posé

Digitized by Google

$$V_1(z) = z^n V\left(\frac{1}{z}\right), \qquad U_2(z) = z^{n-1} U'\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$U_1(z) = z^n U\left(\frac{1}{z}\right), \qquad V_2(z) = z^{n-1} V'(z)$$

$$\Pi_1(z) = z^\pi \Pi\left(\frac{1}{z}\right),$$

en désignant par $\pi$ le degré du polynôme $\Pi(z)$.

Ceci peut s'écrire

$$[(a+bz)(c+dz)V_1U_2 - U_2V_1) - (p+qz)U_1V_1]z^{\pi-1} - \Pi_1 V_1^2 = V_1^2(z^{2n+\pi}),$$

$(z^{2n})$ et $(z^{2n+\pi})$ représentant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $z$ et dont les premiers termes sont de degrés respectifs $2n$ et $2n+\pi$.

Le premier membre étant de degré $2n+\pi$, la série $V_1^2(z^{2n+\pi})$ ne peut que se réduire à son premier terme, d'où

$$[(a+bz)(c+dz)(V_1U_2 - U_1V_2) - (p+qz)U_1V_1]z^{\pi-1} - \Pi_1 V_1^2$$
$$= z^{2n+\pi} \times \text{constante}.$$

Changeant à nouveau $z$ en $\frac{1}{z}$,

$$(4) \quad (az+b)(cz+d)(VU' - UV') - (pz+q)UV - \Pi(z)V^2 = \text{constante}.$$

27. A l'aide de cette relation, LAGUERRE forme comme il suit une équation différentielle dont $V$ est solution.

Soit

$$(5) \quad N(z).y'' - M(z)y' + H.y = 0 \quad \text{ou} \quad y'' - \frac{M}{N}y' + \frac{H}{N}y = 0$$

une équation différentielle linéaire du second ordre admettant les deux solutions particulières

$$y_1 = V(z), \qquad y_2 = e^{-\int \frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)}dz} \times [U(z) - V(z).Z(z)].$$

Des identités

$$Ny_1'' - My_1' + Hy_1 = 0,$$
$$Ny_2'' - My_2' + Hy_2 = 0,$$

Digitized by Google

on déduit, par élimination de $H$,

$$N(y''_1 y_2 - y''_2 y_1) = M(y'_1 y_2 - y'_2 y_1),$$

d'où

$$\frac{M}{N} = \frac{d.}{dz} \operatorname{Log}(y'_1 y_2 - y'_2 y_1);$$

or, en posant

$$\frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)} = R(z),$$

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = V' e^{-\int R.dz}(U - VZ) - V e^{-\int R dz}(U' - V'Z - VZ')$$

$$+ V e^{-\int R dz} \times R(U - VZ) = e^{-\int R dz}[V'U - VU' + V^2 Z' + VUR - V^2 ZR]$$

$$= \frac{e^{-\int R dz}}{(az+b)(cz+d)}[(az+b)(cz+d)(VU' - UV')$$

$$+ V^2(az+b)(cz+d)Z' - Z(pz+q) + UV(pz+q)]$$

ou, vu la relation (2),

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1$$

$$= \frac{e^{-\int R dz}}{(az+b)(cz+d)}[V^2 \Pi(z) + UV(pz+q) - (az+b)(cz+d)(VU' - UV')]$$

et, tenant compte de (4),

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = -\frac{e^{-\int R dz}}{(az+b)(cz+d)} \times \text{const.} = -\frac{e^{\int \frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)}}}{(az+b)(cz+d)} \times \text{const.},$$

d'où

$$\frac{M}{N} = \frac{d}{dz} \log(y'_1 y_2 - y'_2 y_1) = -\frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)} - \frac{a}{az+b} - \frac{c}{cz+d}$$

$$= -\frac{(p+2ac)z + ad + bc + q}{(az+b)(cz+d)}.$$

L'équation différentielle (5) que vérifie $V$ est donc de la forme

$$(az+b)(cz+d)y'' + [(p+2ac)z + ad + bc + q]y' + \lambda y = 0,$$

où $\lambda$ est indépendant de $z$, vu l'homogénéité.

Si

$$V = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n,$$

Digitized by Google

exprimant que le terme de plus haut degré est nul, il viendra

$$n(n-1)ac + n(p+2ac) + \lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = -n[(n+1)ac + p].$$

Ainsi le polynôme $V$ est une solution de l'équation

$$(6)\quad (az+b)(cz+d)y'' + [(p+2ac)z + ad + bc + q]y' - n[(n+1)ac+p]y = 0.$$

28. Cela posé, LAGUERRE remarque que la relation

$$U_{n-1}V_n - U_nV_{n-1} = -A_{n-1},$$

où $A_{n-1}$ est indépendant de $z$, comme on le voit immédiatement en remplaçant $\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}$, $\frac{U_n}{V_n}$ par leurs développements

$$\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n-2}}{z^{2n-2}} + \frac{M_1}{z^{2n-1}} + \frac{M_2}{z^{2n}} + \frac{M_3}{z^{2n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{U_n}{V_n} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n-2}}{z^{2n-2}} + \frac{S_{2n-1}}{z^{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{N_1}{z^{2n+1}} + \cdots,$$

donne lieu à celle-ci

$$(U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1})A_{n-1} = (U_nV_{n-1} - U_{n-1}V_n)A_n,$$

qu'on peut écrire

$$(V_{n+1}A_{n-1} + V_{n-1}A_n)U_n = (U_{n+1}A_{n-1} + U_{n-1}A_n)V_n$$

ou

$$(V_{n+1} + V_{n-1}P_{n-1})U_n = (U_{n+1} + U_{n-1}P_{n-1})V_n,$$

en posant

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = P_{n-1}.$$

Si l'on détermine le polynôme $Q_{n-1}$ par la condition que

$$V_{n+1} - Q_{n-1}V_n + P_{n-1}V_{n-1} = 0,$$

il s'en suivra que

$$U_{n+1} - Q_{n-1}U_n + P_{n-1}U_{n-1} = 0.$$

Digitized by Google

Ainsi, les polynômes $U$, $V$ vérifient les relations de récurrence

$$(7)\qquad \begin{cases} U_{n+1} - Q_{n-1} U_n + P_{n-1} U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - Q_{n-1} V_n + P_{n-1} V_{n-1} = 0, \end{cases}$$

où $P$, étant indépendant de $z$, $Q$ est du 1er degré en $z$.

29. Ici Laguerre remarque qu'on peut faire l'hypothèse que voici: *La constante de l'équation* (4) *est égale à* $-A_n$. Et *en effet*, la relation supposée

$$\frac{U_n(z)}{V_n(z)} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{M_1}{z^{2n+1}} + \cdots$$

donne lieu à celle-ci

$$\frac{U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{V_n\left(\frac{1}{z}\right)} = S_0 + S_1 z + S_{2n} z^{2n} + M_1 z^{2n+1} + \cdots = \frac{z^n U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{U_{n,1}(z)}{V_{n,1}(z)}.$$

Si

$$U_{n,1} = S_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_n z^n,$$

$$V_{n,1} = 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots + \gamma_n z^n,$$

on aura

$$\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}} = \frac{\lambda S_0 + \lambda \beta_1 z + \cdots + \lambda \beta_n z^n}{\lambda + \lambda \gamma_1 z + \cdots + \lambda \gamma_n z^n} = \frac{z^n U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{V_n\left(\frac{1}{z}\right)},$$

d'où

$$\frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{\lambda S_0 z^n + \lambda \beta_1 z^{n-1} + \lambda \beta_2 z^{n-2} + \cdots + \lambda \beta_n}{\lambda z^n + \lambda \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \lambda \gamma_n},$$

quelle que soit l'indéterminée $\lambda$, et si le polynôme

$$z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \gamma_n$$

vérifie l'équation (6), il en est de même du polynôme

$$\lambda z^n + \lambda \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \lambda \gamma_n.$$

Or, la relation

$$U_{n-1} V_n - U_n V_{n-1} = -A_{n-1},$$

Digitized by Google

où $A_{n-1}$ est une constante, donne, dans ces conditions,

$$A_{n-1} = \mu\lambda(\beta_n \varepsilon_{n-1} - \delta_{n-1}\gamma_n)$$

et si

$$\Pi(z) = \Pi_0 z + \Pi_1 z^2 + \cdots + \Pi_\Pi$$

la relation (4) donne

$$b\,d(\lambda\gamma_n . \lambda\beta_{n-1} - \lambda\beta_n . \lambda\gamma_{n-1}) - q\lambda^2\beta_n\gamma_n - \Pi_\Pi\lambda^2\gamma_n^2 = \text{constante}.$$

Supposer que la constante est égale à $-A_n$ revient donc à écrire

$$\lambda[b\,d(\gamma_n\beta_{n-1} - \beta_n\gamma_{n-1}) - q\beta_n\gamma_n - \Pi_\Pi\gamma_n^2] = \mu(\delta_{n-1}\gamma_n - \beta_n\varepsilon_{n-1}),$$

d'où l'indéterminée $\mu$ en fonction de $\lambda$.

Dans ces conditions, l'équation (4) s'écrit

$$(az+b)(cz+d)(V_n V'_n - U_n V'_n) - (pz+q)U_n V_n - \Pi(z)V_n^2$$
$$= U_n V_{n+1} - U_{n+1} V_n$$

ou

$$[(az+b)(cz+d)V'_n + V_{n+1}]U_n$$
$$= [(az+b)(cz+d)U'_n - (pz+q)U_n - \Pi V_n + U_{n+1}]V_n$$

ou encore, $\Omega_n$ étant une indéterminée,

$$[(az+b)(cz+d)V'_n - \Omega_n V_n + V_{n+1}]U_n$$
$$= [(az+b)(cz+d)U'_n - \Omega_n U_n - (pz+q)U_n - \Pi V_n + U_{n+1}]V_n,$$

et se décompose en les deux suivantes

(8) $(az+b)(cz+d)V'_n = \Omega_n V_n - V_{n+1}$,

(9) $(az+b)(cz+d)U'_n = \Pi V_n + (pz+q+\Omega_n)V_n - U_{n+1}$,

où $\Omega_n$ est, par raison d'homogénéité, du 1er degré en $z$.

Dérivant l'équation (8), il vient

$$(az+b)(cz+d)V''_n = -(2acz+bc+ad)V'_n + \Omega'_n V_n + \Omega_n V'_n - V'_{n+1}$$

et (6) devient

$$(pz+q+\Omega_n)V'_n - V'_{n+1} + \{\Omega'_n - [ac(1+n)+p]n\}V_n = 0.$$

Digitized by Google

Éliminant $V'_n$ entre cette équation et l'équation (8), on aura

$$(pz+q+\Omega_n)(\Omega_n V_n - V_{n+1}) - (\Omega_{n+1} V_{n+1} - V_{n+2})$$
$$+(az+b)(cz+d)\{\Omega'_n - [ac(1+n)+p]n\} V_n = 0$$

ou

$$V_{n+2} - [pz+q+\Omega_n+\Omega_{n+1}] V_{n+1}$$
$$+\{(pz+q+\Omega_n)\Omega_n + (az+b)(cz+d)\Omega'_n - [ac(1+n)+p]n\} V_n = 0.$$

Comparant aux relations (7), il vient

$$(10) \qquad Q_n = pz+q+\Omega_n+\Omega_{n+1},$$

$$(11) \qquad P_n = (pz+q+\Omega_n)\Omega_n + (az+b)(cz+d)\{\Omega'_n - [ac(1+n)+p]n\}.$$

Les relations de récurrence (7) seront déterminées une fois le polynôme du premier degré $\Omega_n$ déterminé lui-même.

30. Laguerre pose à cet effet

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{(az+b)(cz+d)} dz},$$

d'où

$$\Omega_n = (az+b)(cz+d)\frac{u'}{u}$$

et, substituant dans l'équation (11), il vient

$$[pz+q+(az+b)(cz+d)](az+b)(cz+d)\frac{u'}{u}$$
$$+(az+b)(cz+d)\left[(2acz+ad+bc)\frac{u'}{u}+(az+b)(cz+d)\frac{uu''-u'^2}{u^2}\right]-P_n=0$$

ou

$$(pz+q)(az+b)(cz+d)\frac{u'}{u}+(az+b)(cz+d)$$
$$\left\{(2acz+ad+bc)\frac{u'}{u}+(az+b)(cz+d)\frac{u''}{u}-n[(n+1)ac+p]\right\}-P_n=0$$

ou encore

$$(12) \quad (az+b)(cz+d)u'' + [(2ac+p)z+ad+bc+q]u'$$
$$-\left\{n[(n+1)ac+p]+\frac{P_n}{(az+b)(cz+d)}\right\}u = 0;$$

Digitized by Google

$\Omega_n$ étant un polynôme du 1er degré, posons

$$\frac{\Omega_n}{(az+b)(cz+d)} = \frac{a\alpha}{az+b} + \frac{b\beta}{cz+d};$$

déterminer le polynôme $\Omega_n$ reviendra à déterminer les constantes $\alpha$, $\beta$.

D'ailleurs cette relation conduit à celle-ci :

$$u = e^{\log(az+b)^\alpha(cz+b)^\beta} = (az+b)^\alpha(cz+d)^\beta$$

et si l'on exprime que $u$ vérifie identiquement l'équation (12) on aura 3 équations déterminant $\alpha$, $\beta$, $P_n$, d'où

$$\Omega_n = (\alpha+\beta)acz + a\alpha d + c\beta b$$

et enfin, vu l'équation (10),

$$(12^{\text{bis}}) \qquad Q_n = pz + q + \Omega_n + \Omega_{n+1}.$$

31. Voici le développement des calculs.

Si $W = (az+b)(cz+d)$, on a posé

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz}$$

et l'équation (12) s'écrit

$$(13) \qquad Wu'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n}{W}\right)u = 0,$$

où

$$W_0 = (2ac+p)z + bc + ad + q,$$
$$W_1 = -[ac(1+n)+p]n.$$

On a donc

$$u' = \frac{\Omega_n}{W} e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz}, \quad u'' = \left(\frac{\Omega_n}{W}\right)^2 e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz} + \left(\frac{d}{dz}\cdot\frac{\Omega_n}{W}\right) e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz}$$

et, portant dans (13),

$$W\left[\left(\frac{\Omega_n}{W}\right)^2 + \frac{d}{dz}\cdot\frac{\Omega_n}{W}\right] + W_0\frac{\Omega_n}{W} + W_1 - \frac{P_n}{W} = 0$$

$$W^2\left(\frac{\Omega_n^2}{W^2} + \frac{W\Omega_n' - \Omega_n W'}{W^2}\right) + W_0\Omega_n + W_1 W - P_n = 0$$

$$(14) \qquad \Omega_n^2 + W\Omega_n' - W'\Omega_n + W_0\Omega_n + WW_1 - P_n = 0;$$



Digitized by Google

or,

$$(15)\qquad \Omega_n = (\alpha+\beta)acz + a\alpha d + c\beta b = \gamma z + \delta,$$

en écrivant $ac(\alpha+\beta)=\gamma$, $a\alpha d + c\beta b = \delta$ et (14) devient ainsi

$$\begin{aligned}(\gamma z+\delta)^2 + (az+b)(cz+d)\gamma - (2acz+bc+ad)(\gamma z+\delta)\\ + [(2ac+p)z+bc+ad+q](\gamma z+\delta)\\ - (az+b)(cz+d)[ac(1+n)+p]n - P_n = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(\gamma z+\delta)^2 + (az+b)(cz+d)\gamma + (pz+q)(\gamma z+\delta)^n\\ - (az+b)(cz+d)[ac(1+n)+p]n - P_n = 0.\end{aligned}$$

Cette équation devant être identiquement vérifiée, il s'ensuit qu'on doit avoir simultanément

$$(16)\qquad \gamma^2 + ac\gamma + p\gamma - ac[ac(1+n)+p]n = 0,$$

$$(17)\quad 2\gamma\delta + (ad+bc)\gamma + p\delta + q\gamma - (ad+bc)[ac(1+n)+p]n = 0,$$

$$(18)\qquad \delta^2 + b\delta\gamma + q\delta - bd[ac(1+n)+p]n - P_n = 0.$$

On tire de (16)

$$\gamma = \frac{-(ac+p) \pm (ac+p+2dcn)}{2},$$

d'où les deux valeurs suivantes de $\gamma$:

$$\gamma_1 = acn, \qquad \gamma_2 = -(ac+p+acn).$$

Si $\gamma = acn$, l'équation (17) donne

$$\delta = \frac{(ad+bc)(acn+p) - qac}{2acn+p}$$

et l'équation (18) donne, après un calcul assez long mais qui n'offre aucune difficulté,

$$P_n = \frac{n(nac+p)[n(ad-bc)a - bp + aq][n(ad-bc)c - cq + pd]}{[2nac+p]^2}.$$

L'équation (15) donne alors

$$\Omega_n = acnz + \frac{(ad+bc)(acn+p) - qac}{2nac+p}n,$$

Digitized by Google

d'où ($12^{bis}$)

$$Q_n = \{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]z + (ad+bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq\} \times$$
$$\times \frac{(2n+1)ac+p}{(2nac+p)[2(n+1)ac+p]}.$$

Si $\gamma = -(ac+p+acn)$, on est conduit aux mêmes valeurs de $P_n$ et $Q_n$.

Ainsi, les termes des réduites $\frac{U_n}{V_n}$ de la fraction continue développement de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z),$$

vérifient la relation de récurrence

$$U_{n+1} - Q_{n-1}U_n + P_{n-1}U_{n-1} = 0,$$
$$V_{n+1} - Q_{n-1}V_n + P_{n-1}V_{n-1} = 0,$$

où

$$P_n = \frac{n(nac+p)[n(ad-bc)a-bp+aq][n(ad-bc)c-cq+pd]}{(2nac+p)^2}$$

$$Q_n = \{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]z + (ad+bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq\} \times$$
$$\times \frac{(2n+1)ac+p}{(2nac+p)[2(n+1)ac+p]}.$$

Dans le cas où $p = 0$, les quantités $P_n$, $Q_n$ prennent une forme beaucoup plus simple :

$$P_n = \left(n\frac{ad-bc}{2} + \frac{q}{2}\right)\left(n\frac{ad-bc}{2} - \frac{q}{2}\right),$$

$$Q_n = (2n+1)\left(acz + \frac{ad+bc}{2}\right).$$

On remarquera que, d'après la marche des calculs, si

$$U_{n,1} = S_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_n z^n,$$
$$V_{n,1} = 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots + \gamma_n z^n,$$

les polynômes $U_n$, $V_n$ donnés par les relations de récurrence seront les

Digitized by Google

produits de $U_{n,1}$, $V_{n,1}$ par un facteur constant :

$$U_n = \lambda . U_{n,1}, \qquad V_n = \lambda . V_{n,1}.$$

Comme $\frac{U_n}{V_n} = \frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$, cela n'offre aucun inconvénient.

**II. — Étude de la convergence du développement précédent dans le cas où $p = 0$.**

Nous montrerons que le cas général rentre dans un cas plus étendu encore, dont nous ferons plus loin l'étude (Ch. III).

32. Posant $ac = P$, $ad + bc = 2Q$, $ad - bc = 2R$, $q = 2\omega$, les relations de récurrence s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} U_{n+1} - (2n+1)(P\chi + Q)U_n + (nR + \omega)(nR - \omega)U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - (2n+1)(P\chi + Q)V_n + (nR + \omega)(nR - \omega)V_{n-1} = 0. \end{cases}$$

La suite $\frac{U_0}{V_0}, \frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \ldots$ converge ou diverge en même temps que la série

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots + \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$
$$+ \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right) + \cdots.$$

Étudions le rapport

$$R_n = \frac{\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}}{\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}} = \frac{U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1}}{U_nV_{n-1} - U_{n-1}V_n} \times \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}.$$

Éliminant $(2n+1)(P\chi + Q)$ entre les relations de récurrence, il vient

$$U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1} = (nR + \omega)(nR - \omega)(U_nV_{n-1} - U_{n-1}V_n),$$

d'où

$$R_n = (nR + \omega)(nR - \omega)\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}.$$

Digitized by Google

Si l'on pose

$$V_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}(nR - \omega)V_{n-1},$$

$R_n$ devient

$$R_n = \frac{nR + \omega}{(n+1)R - \omega} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}};$$

d'ailleurs

$$(2)\quad [(n+1)R - \omega]u_{n+1} - (2n+1)(P\zeta + Q)u_n + (nR + \omega)u_{n-1} = 0.$$

Or, la fonction $Y(\zeta, \alpha)$

$$Y(\zeta, \alpha) = u_0 + u_1\alpha + v_2\alpha^2 + v_3\alpha^3 + \cdots + v_n\alpha^2$$

$$= \alpha^{\frac{\omega}{R}}[R - 2(P\zeta + Q)\alpha + R\alpha^2]^{-\frac{2\omega+R}{2R}} \int \frac{(a_0 + a_1\alpha)d\alpha}{\alpha^{1+\frac{\omega}{R}}[R - 2(P\zeta + Q)\alpha + R\alpha^2]^{1-\frac{2\omega+R}{2R}}},$$

où les arbitraires $a_0$, $a_1$ ont été choisis de manière que les coefficients des termes en $\alpha^0$, $\alpha^1$ du développement soient précisément $u_0$, $u_1$, vérifie l'équation différentielle

$$[R\alpha - 2(P\zeta + Q)\alpha^2 + R\alpha^3]\frac{dY}{d\alpha} + [-\omega - (P\zeta + Q)\alpha + (R + \omega)\alpha^2]Y = a_0 + a_1\alpha.$$

Si l'on dérive $n + 1$ fois par rapport à $\alpha$ cette relation, on obtient, en substituant $m!v_m$ à $\frac{d^m Y}{d\alpha^m}$,

$$[(n+1)R - \omega]v_{n+1} - (2n+1)(P\zeta + Q)v_n + (nR + \omega)v_{n-1} = 0;$$

la comparaison avec la relation (2) montre que (puisque $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$),

$$v_m = u_m$$

*quelque soit m.*

Pour une valeur déterminée de $\zeta$, la fonction $Y(\zeta, \alpha)$

$$Y(\zeta, \alpha) = \alpha^{\frac{\omega}{R}}[R - 2(P\zeta + Q)\alpha + R\alpha^2]^{-\frac{2\omega+R}{2R}} \times$$

$$\times \int \frac{(a_0 + a_1\alpha)d\alpha}{\alpha^{1+\frac{\omega}{R}}[R - 2(P\zeta + Q)\alpha + R\alpha^2]^{1-\frac{2\omega+R}{2R}}}$$

Digitized by Google

admet un développement

$$v_0 + v_1\alpha + u_2\alpha^2 + u_3\alpha^3 + \cdots + u_n\alpha^n + \cdots$$

valable dans un cercle ayant pour centre le point $\alpha = 0$ et passant par le point singulier $\alpha_i$, le plus proche du point $\alpha = 0$.

Or la fonction admet les deux points singuliers $\alpha_1$, $\alpha_2$ racines de l'équation

$$(3) \qquad R\alpha^2 - 2(P\zeta + Q)\alpha + R = 0.$$

*Si les modules de ces racines sont différents l'un de l'autre* ($|\alpha_1| < |\alpha_2|$) un seul point singulier $\alpha_1$ sera sur le cercle de convergence et le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ tendra vers $\alpha_1$. Donc, en ce cas,

$$\lim \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = |\alpha_1| < |\sqrt{\alpha_1\alpha_2}|$$

et par suite

$$\lim \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| < 1,$$

puisque $\alpha_1\alpha_2 = 1$.

Alors

$$|R_n| = \left|\frac{nR + \omega}{(n+1)R - \omega}\right| \times \left|\frac{u_{n-1}}{u_n}\right| \times \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|$$

tend vers une *limite moindre que un* et la suite des *réduites converge.*

33. Il ne peut y avoir divergence que si les modules des racines $\alpha_1$, $\alpha_2$ de l'équation (3) sont égaux, car ils sont alors égaux à *un* et $|R_n|$ tend vers *un.*

*Si les modules des racines de l'équation* (3) *sont égaux, il y a divergence.*

Un calcul facile montre que l'identité des modules a lieu sous condition que le point $\zeta$ soit sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

En effet, si l'équation (3) admet la racine $\alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha'_2 i$, elle admettra la racine

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha'_1 + \alpha'_2 i} = \frac{\alpha'_1 - \alpha'_2 i}{\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2}$$

et, les modules devant être égaux,

Digitized by Google

$$\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 = \frac{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2}{(\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2)^2},$$

d'où

$$\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \alpha_1' - \alpha_2' i,$$

d'où encore

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1'.$$

Soit

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2(P\zeta + Q)}{R} = 2H(x, y) + 2iK(x, y);$$

la condition précédente nécessitera que

$$K = 0.$$

D'ailleurs

$$\alpha = -H \pm \sqrt{H^2 - 1}$$

nécessite de plus que

$$|H| \leqq 1,$$

soit dans le cas présent

$$\zeta = x + iy, \quad R = \rho_1 + \rho_2 i, \quad P = \Pi_1 + \Pi_2 i, \quad Q = \chi_1 + \chi_2 i;$$

on aura :

$$\frac{2(P\zeta + Q)}{R} = 2\frac{(\Pi_1 + \Pi_2 i)(x + iy) + \chi_1 + \chi_2 i}{\rho_1 + \rho_2 i}$$

$$= \frac{2(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_2 x + \Pi_1 y + \chi_2)\rho_2 + i[-(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_2 + (\Pi_2 x + \Pi_1 y + \chi_2)\rho_1]}{\rho_1^2 + \rho_2^2}$$

et les conditions d'identité des modules s'écrivent

$$\frac{\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1}{\rho_1} = \frac{\Pi_1 \gamma + \Pi_2 x + \chi_2}{\rho_2}$$

$$= \left[\frac{(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_1 y + \Pi_2 x + \chi_1)\rho^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2}\right]$$

$$-1 \leqq \frac{(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_2 x - \Pi_1 y + \chi_2)\rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \leqq 1,$$

conditions qui deviennent

$$\frac{(a_1 c_1 - a_2 c_2)x - (a_2 c_1 + a_1 c_2)y + a_1 d_1 - a_2 d_2}{a_1 d_1 - a_2 d_2 - b_1 c_1 + b_2 c_2}$$

$$= \frac{(a_1 c_1 - a_2 c_2)y + (a_2 c_1 + a_1 c_2)x + a_1 d_2 + a_2 d_1}{a_1 d_1 + a_2 d_2 - b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{\delta + 1}{2}$$

avec

$$-1 < \delta < 1,$$

Digitized by Google

si

$$a = a_1 + a_2 i, \quad b = b_1 + b_2 i, \cdots$$

Ces conditions supposent bien que le point $z$ est sur le segment rectiligne joignant les deux points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

D'ailleurs, il y a ordinairement divergence sur ce segment, car les points en question sont ordinairement points singuliers de la fonction représentée par le développement en fraction continue que nous étudions.

34. Cette fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = q.Z(z) + \Pi(z)$$

est de la forme

$$Z(z) = (az+b)^{-\frac{q}{bc-ad}}(cz+d)^{\frac{q}{bc-ad}} \int \frac{\Pi(z)\,dz}{(az+b)^{1-\frac{q}{ad-bc}}(cz+d)^{1+\frac{q}{bc-ad}}}.$$

1° Si $\Pi(z)$ est nul,

$$Z(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\frac{q}{ad-bc}}$$

et les relations de récurrence subsistent :

$$U_{n+1} - (2n-1)\left(acz + \frac{ad+bc}{2}\right)U_n + \frac{ad-bc}{4}\left[(n-1)^2 - \frac{q^2}{4}\right]U_{n-1} = 0,$$

$$V_{n+1} - (2n-1)\left(acz + \frac{ad+bc}{2}\right)V_n + \frac{ad-bc}{4}\left[(n-1)^2 - \frac{q^2}{4}\right]V_{n-1} = 0.$$

Les points critiques sont alors *algébriques*.

2° Si l'équation différentielle est de la forme particulière

$$(az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = k, \qquad (q=0),$$

d'où

$$Z(z) = \frac{k}{ad-bc}\log\frac{dz+b}{cz+d} = \frac{k}{bc-ad}\log\frac{cz+d}{az+b},$$

les relations de récurrence subsistent encore et s'écrivent

$$U_{n+1} + (2n+1)(Pz+Q)U_n + n^2R^2U_{n-1} = 0,$$

$$V_{n+1} + (2n+1)(Pz+Q)V_n + n^2R^2V_{n-1} = 0.$$

Ici les points critiques sont *logarithmiques*.

Digitized by Google

*Dans l'un et l'autre cas, la convergence est assurée en dehors du segment rectiligne joignant les deux points singuliers.*

*Le prolongement de la fonction par la fraction continue n'est donc pas essentiellement arrêté par les points singuliers qui sont critiques algébriques ou critiques logarithmiques.*

Nous aurions ici à examiner le cas des fonctions vérifiant l'équation différentielle

$$(az + b)\frac{d.Z(z)}{dz} = q.Z(z) + \Pi(z).$$

Nous ferons cette étude après l'exposé de la théorie générale.

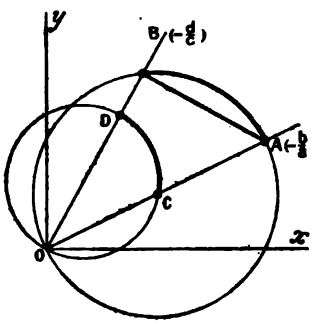
### III. — Extension des résultats précédents aux fractions continues de M. Padé, qui correspondent au cas particulier étudié.

35. Comme on l'a vu, si les réduites obtenues se rapportent à la fonction $Z(z)$, les réduites complémentaires $\frac{U_n}{V_n}$ vérifiant la relation de récurrence

$$U_{n+1} + (2n+1)(P+Qz)U_n + (nR+\omega)(nR-\omega)z^2 U_{n-1} = 0,$$

$$V_{n+1} + (2n+1)(P+Qz)V_n + (nR+\omega)(nR-\omega)z^2 V_{n-1} = 0,$$

se rapporteront à la fonction $Z\left(\frac{1}{z}\right) = Z_1(z)$ et convergeront dans tout le plan, sauf sur l'arc de cercle $CD$, *transformé par rayons vecteurs réciproques du segment rectiligne $AB$.*




*(Fig. 1).*



Digitized by Google

En particulier soit

$$Z(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\omega},$$

d'où

$$Z\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z) = \left(\frac{d+bz}{c+dz}\right)^{\omega}.$$

Le premier développement, celui qu'on a étudié, est valable pour tous les points du plan, sauf le segment $AB$. Le développement *complémentaire,* développement de la fonction $\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{\omega}$ est valable en tous les points du plan, sauf sur le segment $CD$.

Le développement *complémentaire* de $Z(z)$, où l'on a échangé $a$ et $b$, $c$ et $d$, représente donc, comme le premier, le développement de $\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\omega}$, mais est valable, lui, dans tout plan, sauf sur *l'arc de cercle* $AB$.

Nous avons donc deux développements de la fonction, l'un divergeant sur le segment rectiligne $AB$ seul, l'autre divergeant sur l'arc de cercle $AB$ seul. Ainsi la fonction est représentée par l'un au moins de ces développements en un point quelconque du plan.

## CHAPITRE III.

**Étude de la convergence d'une suite de fractions rationnelles $\frac{U_p}{V_0}, \frac{U_{p+1}}{V_1}, \frac{U_{p+2}}{V_2}, \cdots, \frac{U_{p+n}}{V_n}$, où les polynômes $U$, $V$ sont définis par des relations de récurrence de l'une des formes :**

$$\begin{cases} A_h U_{p+m+1} + B_{h+1} U_{p+m} + \Pi(m) A_h U_{p+m-1} = 0, \\ A_h V_{m+1} + B_{h+1} V_m + \Pi(m) A_h V_{m-1} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_h U_{m+1} + B_{h+1} U_m + \Pi(m) A_h U_{m-1} = 0, \\ A_h U_{q+m+1} + B_{h+1} U_{q+m} + \Pi(m) A_h V_{m-1} = 0, \end{cases}$$

**$A_h$, $B_{h+1}$ étant des polynômes en $z$ de degrés respectifs $h$ et $h+1$, et $A_h$, $B_{h+1}$, $\Pi(m)$ étant fonctions de $m$.**

Nous supposerons même que $\Pi(m)$ est un polynôme en $m$. Le cas où $\Pi(m)$ est une fraction rationnelle se ramène aisément à celui-ci, comme on le verra à propos des développements de LAGUERRE.

Digitized by Google

## I. — Préliminaires.

36. Dans l'un et l'autre cas, nous avons à considérer une série de la forme

$$\frac{U_0}{V_0}+\left(\frac{U_1}{V_1}-\frac{U_0}{V_0}\right)+\cdots+\left(\frac{U_n}{V_n}-\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)+\left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}=\frac{U_n}{V_n}\right)+\cdots$$

et le rapport

$$R_n=\left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}=\frac{U_n}{V_n}\right):\left(\frac{U_n}{V_n}-\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$

$$=\frac{U_{n+1}V_n-U_nV_{n+1}}{U_nV_{n-1}-U_{n-1}V_n}\times\frac{V_nV_{n-1}}{V_{n+1}V_n}=\Pi(n)\frac{V_n}{V_{n+1}}\times\frac{V_{n-1}}{V_n},$$

où

(1) $$A_bV_{n+1}+B_{b+1}V_n+\Pi(n)A_bV_{n-1}=0.$$

On peut écrire

$$R_n=\left[\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}\right]\left[\sqrt{\Pi(n-1)}\frac{V_{n-1}}{V_n}\right]\times\frac{\sqrt{\Pi(n)}}{\sqrt{\Pi(n-1)}}$$

et (1) peut se mettre sous la forme

$$\Pi(n)\frac{V_n}{V_{n+1}}\times\frac{V_{n-1}}{V_n}+\frac{B_{b+1}}{A_b}\times\frac{V_n}{V_{n+1}}+1=0$$

ou

$$\frac{\sqrt{\Pi(n)}}{\sqrt{\Pi(n-1)}}\left[\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}\right]\left[\sqrt{\Pi(n-1)}\frac{V_{n-1}}{V_n}\right]$$
$$+\frac{B_{b+1}}{A_b\sqrt{\Pi(n)}}\times\left[\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}\right]+1=0.$$

Si $\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}$ tend vers une limite $L$ (et alors $R_n$ tend vers la limite $L^2$), on a

$$L^2+\lim_{n=\infty}\frac{B_{b+1}}{A_b\sqrt{\Pi(n)}}L+1=0.$$

*Trois cas sont à examiner* :

Digitized by Google

I. $\dfrac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers une limite déterminée,

II. $\dfrac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers zéro,

III. $\dfrac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini,

car nous excluons le cas où $\dfrac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ n'aurait aucune limite.

## II. — Premier cas.

37. Si $\dfrac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ *tend vers une limite déterminée,* nous admettrons que $B$ sont, comme $\Pi$, des polynômes, mais polynômes en $z$ et $n$.

I. $A_h$ et $B_{h+1}$ *sont d'un même degré $k$ en $n$* : Alors $\Pi(n)$ se réduit à une constante $\omega$,

$$R_n = \omega \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}$$

et (1) devient, en écrivant $A_k(n)$ pour $A_n$, $B_k(n)$ pour $B_n$,

$$(2) \qquad A_k(n)V_{n+1} + B_k(n)V_n + \omega A_k(n)V_{n-1} = 0.$$

Considérons une équation différentielle de la forme

$$(3) \begin{cases} \alpha^k[a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2]\dfrac{d^pZ(z,\alpha)}{d\alpha^p}+\alpha^{k-1}[b_1+b_2\alpha+b_3\alpha^2]\dfrac{d^{p-1}Z(z,\alpha)}{d\alpha^{p-1}}+\cdots \\ \cdots+\alpha[c_1+c_2\alpha+c_3\alpha^2]\dfrac{dZ(z,\alpha)}{d\alpha}+[d_1+d_2\alpha+d_3\alpha^2]Z(z,\alpha)=\sigma_0+\sigma_1\alpha, \end{cases}$$

où $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, ..., $d_3$, $\sigma_0$, $\sigma_1$ sont des fonctions de $z$, $Z$ étant fonction de $z$ et de $\alpha$.

La fonction

$$(4) \qquad Z(z,\alpha) = S_0 + S_1\alpha + S_2\alpha^2 + \cdots + S_n\alpha^n + \cdots$$

vérifiera cette équation si la série du second membre converge et si pour $m > 1$ on a

Digitized by Google

$$\left[a_1\frac{m!}{(m-k)!}+b_1\frac{m!}{(m-k+1)!}+\cdots+c_1\frac{m!}{(m-1)!}+d_1\frac{m!}{m!}\right]S_m$$
$$+\left[a_2\frac{(m-1)!}{(m-k-1)!}+b_2\frac{(m-1)!}{(m-k)!}+\cdots+c_2\frac{(m-1)!}{(m-2)!}+d_2\frac{(m-1)!}{(m-1)!}\right]S_{m-1}$$
$$+\left[a_3\frac{(m-2)!}{(m-k-2)!}+b_3\frac{(m-2)!}{(m-k-1)!}+\cdots+c_3\frac{(m-2)!}{(m-3)!}+d_3\frac{(m-2)!}{(m-2)!}\right]S_{m-2}=0.$$

Déterminons les polynômes en $\chi(a, b, c, \ldots)$, de manière que, *quelque soit m*, on ait

$$a_1\frac{m!}{(m-k)!}+b_1\frac{m!}{(m-k+1)!}+\cdots+c_1\frac{m!}{(m-1)!}+d_1\frac{m!}{m!}=A_k(m-1),$$

$$a_2\frac{(m-1)!}{(m-k-1)!}+b_2\frac{(m-1)!}{(m-k)!}+\cdots+c_2\frac{(m-1)!}{(m-2)!}+d_2\frac{(m-1)!}{(m-1)!}=B_k(m-1),$$

$$a_3\frac{(m-2)!}{(m-k-2)!}+b_3\frac{(m-2)!}{(m-k-1)!}+\cdots+c_3\frac{(m-2)!}{(m-3)!}+d_3\frac{(m-2)!}{(m-2)!}=\omega.A_k(m-1);$$

les quantités $S_m$ vérifieront la loi de récurrence

(5) $$A_k(m-1)S_m+B_k(m-1)S_{m-1}+\omega.A_k(m-1)S_{m-2}=0 \quad (m>1).$$

Si de plus on détermine $\sigma_0$, $\sigma_1$, de manière que

(6) $$S_0=V_0, \qquad S_1=V_1,$$

on aura, *quelque soit l'indice m*, comme le montre le rapprochement des relations (2), (5), (6),

$$S_m=V_m,$$

d'où

$$\frac{V_n}{U_{n+1}}=\frac{S_n}{S_{n+1}}.$$

Or, on sait que l'équation différentielle (3) admet une solution analytique (4) convergente dans un cercle décrit de l'origine comme centre, le rayon de ce cercle étant égal au module de la racine de moindre module $\alpha_1$ de l'équation

(7) $$a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2=0,$$

cela sauf cas exceptionnels.

Digitized by Google

Donc,

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{S_n}{S_{n+1}}\right| = L,$$

où $L$ est la limite du module de la racine $\alpha_1$.

Si

$$A_k(m) = A m_k + A_2 m^{k-1} + \cdots,$$

$$B_k(m) = B m^k + B_1 m^{k-1} + \cdots,$$

où $A$, $A_1$, $B$, $B_1$, ... sont des fonctions de $z$,

$$a_1 = A, \qquad a_2 = B, \qquad a_3 = \omega A$$

et l'équation (7) s'écrit

$$\omega A \alpha^2 + B\alpha + A = 0. \tag{8}$$

*Si les modules des racines $\alpha_1$, $\alpha_2$ sont inégaux* ($|\alpha_1| < |\alpha_2|$),

$$\lim R = \omega \lim \left(\frac{V_n}{V_{n+1}}\right)^2 = \omega \alpha_1^2 < \omega \alpha_1 \alpha_2,$$

*quantité dont le module est un, puisque*

$$\omega \alpha_1 \alpha_2 = \omega \times \frac{A}{\omega A} = 1;$$

donc

$$\lim |R| < 1$$

*et il y a convergence.*

Si les modules des racines $\alpha_1$, $\alpha_2$ sont égaux,

$$\lim |R| = 1$$

*et il y a doute quant à la convergence.*

L'équation (8) peut d'ailleurs s'écrire

$$(\sqrt{\omega}\,\alpha)^2 + \frac{B}{A\sqrt{\omega}}(\sqrt{\omega}\,\alpha) + 1 = 0,$$

ce qui montre que si les modules des racines de l'équation (8) sont égaux, il en sera de même des modules des racines de l'équation

$$\beta^2 + \frac{B}{A\sqrt{\omega}}\beta + 1 = 0,$$

comme il est facile de le reconnaître.

Digitized by Google

38. II. *Cas général.* — Le cas général se ramène comme il suit au cas précédent.

Si $\frac{B_{b+1}}{A_b\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers une limite déterminée et si $A_b$, $B_{b+1}$ sont respectivement de degrés $m$ et $k$ en $n$, $\Pi(n)$ sera de degré $2(R-m)$.

Ainsi, nous avons à déterminer la limite de

$$\Pi(n)\frac{V_n}{V_{n+1}}\times\frac{V_{n-1}}{V_n},$$

sachant que les polynômes $V$ sont liés par une relation de récurrence

$$A_m(n)V_{n-1}+B_k(n)V_n+\Pi_{2(k-m)}(n)A_m(n)V_{n-1}=0.$$

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_{k-m}$, $k-m$ racines quelconques de l'équation $\Pi_{2(k-m)}(n)=0$, en sorte que

$$\Pi_{2(k-m)}(n)=\omega(n-n_1)(n-n_2)\cdots(n-n_{k-m})\Pi'_{k-m}(n).$$

Posons

$$\frac{V_n}{V_{n+1}}=\frac{U_n}{U_{n+1}}\times\frac{1}{n-n_1}\times\frac{1}{n-n_2}\times\cdots\times\frac{1}{n-n_{k-m}}.$$

Nous aurons à étudier la limite de

$$\frac{\omega\Pi'(n)}{(n-n_1-1)(n-n_2-1)\cdots(n-n_k-1)}\times\frac{U_n}{U_{n+1}}\times\frac{U_{n-1}}{U_n}$$

ou simplement de

$$\omega\frac{U_n}{U_{n+1}}\times\frac{U_{n-1}}{U_n},$$

puisque $\Pi'(n)$ est un polynôme en $n$ de degré $k-m$.

Or, la relation de récurrence peut s'écrire

$$\Pi_{2(k-m)}(n)A_m(n)\frac{V_n}{V_{n+1}}\times\frac{V_{n-1}}{V_n}+B_k(n)\frac{V_n}{V_{n+1}}+A_m(n)=0$$

ou

$$\Pi_{2(k-m)}(n)A_m(n)\frac{U_n}{U_{n+1}}\cdot\frac{1}{n-n_1}\cdot\frac{1}{n-n_2}\cdots\frac{1}{n-n_{k-m}}\times$$
$$\times\frac{U_{n+1}}{U_n}\times\frac{1}{n-n_1-1}\times\frac{1}{n-n_2-1}\times\cdots+\frac{1}{n-n_{k-m}-1}$$
$$+B_k(n)\frac{U_n}{U_{n+1}}\times\frac{1}{(n-n_1)(n-n_2)\cdots(n-n_{k-m})}$$

Digitized by Google

ou encore

$$\Pi_{2(k-m)}(n)\times A_m(n)u_{n-1}+B_k(n)(n-n_1-1)(n-n_2-2)\cdots(n-n_{k-m}-1)u_n$$
$$+A_m(n)\times(n-n_1)(n-n_2)\cdots(n-n_{k-m})(n-n_1-1)\cdots(n-n_{k-m}-1)\cdots u_{n+1}=0$$

et les coefficients de $u_{n-1}$, $u_n$, $u_{n+1}$ sont d'un même degré en $n$, de degré $2k-m$.

On est ainsi ramené au cas précédent.

39. La convergence a lieu en tous les points du plan où les modules des racines d'une équation

$$\beta^2+\frac{B}{A\sqrt{\omega}}\beta+1=0,$$

que nous écrirons

$$\beta^2-2[P(x,y)+iQ(x,y)]\beta+1=0,$$

sont inégaux, ce qui suppose que

$$Q=0,\qquad -1<P<1.$$

Divers cas peuvent se présenter. Les régions de divergence peuvent être de simples arcs; elles peuvent être formées de une ou plusieurs courbes fermées ou non.

Elles peuvent ne pas exister.

### III. — Second et troisième cas.

40. $\dfrac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ *tend vers zéro*: ici $|L|=1$ et nous ne pouvons rien dire sur la divergence ou la convergence. Parfois, l'application des règles connues relativement aux séries donnera la solution de la question. Mais *on ne saurait énoncer aucune proposition générale.*

En fait, la fonction

$$F(z,X)=\frac{U_0}{V_0}+\left(\frac{U_1}{V_1}-\frac{U_0}{V_0}\right)X+\left(\frac{U_2}{V_2}-\frac{U_1}{V_1}\right)X^2+\cdots$$

a, quelque soit $z$, un ou plusieurs points singuliers sur le cercle de rayon *un* tracé dans le plan de la variable $X$ et il y aurait lieu d'étudier l'allure de la fonction sur ce cercle.

Digitized by Google

41. $\dfrac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini.

Si $B_{h+1}$ et $A_h$ sont des polynômes en $n$, les raisonnements qui ont été faits pour le premier cas sont applicables.

## IV. — Applications.

42. Nous étudierons ici le *cas général* du développement en fraction continue de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z).$$

Nous avons ici (§ 31)

$$A_h U_{n+1} + B_{h+1} U_n + \Pi(n) A_h U_{n-1} = 0$$
$$A_h V_{n+1} + B_{h+1} V_n + \Pi(n) A_h V_{n-1} = 0$$

avec

$$A_h = 1$$

$$B_{h+1} = -\{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]z + (ad+bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq\} \times$$
$$\times \frac{(2n+1)ac+p}{[2(n+1)ac+p][2nac+p]}$$

$$\Pi(n) = \frac{n(nac+p)[n(ad-bc)a-bp+aq][n(ad-bc)cn-cq+pd]}{(2nac+p)^2}$$

et, comme nous allons le voir, ce cas se ramène facilement à celui où $\Pi(n)$ est un polynôme.

Nous avons à étudier le rapport

$$R_n = \Pi(n)\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}.$$

Posons

$$B_{h+1} = [P(n-n_1)(n-n_2)z + Q(n-n_3)(n-n_4)]\frac{M(n-n_5)}{S(n-n_1)(n-n_2)},$$

$$\Pi(n) = \frac{N_n(n-n_6)(n-n_7)(n-n_8)}{(n-n_2)^2},$$

$$P = 4a^2c^2,$$
$$Q = 2ac(ad+bc),$$
$$M = -2ac,$$
$$S = 4a^2c^2,$$
$$N = \left(\frac{ad-bc}{2}\right)^2, \qquad n\frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{U_n}{U_{n+1}},$$



Digitized by Google

d'où

$$V_{n+1} + B_{n+1} V_n + \Pi(n) V_{n-1} = 0;$$

on aura

$$R_n = \frac{N(n-n_6)(n-n_7)(n-n_8)}{(n-n_2)^2(n-1)} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et la relation de récurrence s'écrit

$$\Pi(n)\frac{V_{n-1}}{V_n} \times \frac{V_n}{V_{n+1}} + B_{b+1}\frac{V_n}{V_{n+1}} + 1 = 0.$$

Posons encore

$$\frac{ad-bc}{2} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{w_n}{w_{n+1}};$$

$R_n$ devient, en négligeant la partie qui tend vers *un*,

$$R_n = \frac{w_n}{w_{n+1}} \times \frac{w_{n-1}}{w_n}$$

et la relation de récurrence prend la forme

$$\left.\begin{array}{l} (ad-bc)(n-n_6)(n-n_7)(n-n_8)(n-n_1)nw_{n-1} \\ -2[2ac(n-n_1)(n-n_2)\chi+(ad+bc)(n-n_3)(n-n_4)](n-n_5)(n-n_2)(n-1)w_n \\ +(ad-bc)(n-n_1)^2(n-n_1)(n-1)nw_{n+1} \end{array}\right\} = 0$$

et devient à la limite

$$\frac{ad-bc}{2}\alpha^2 - 2\left(ac\chi + \frac{ad+bc}{2}\right)\alpha + \frac{ad-bc}{2} = 0,$$

relation déjà trouvé dans le cas où $p = 0$.

Le problème de la convergence est donc résolu : *il y a convergence dans tout le plan, sauf sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes* $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

43. Laguerre *) a donné les développements des fonctions particulières que voici :

1° $$Z(\chi) = e^{\text{arc tang}\,\chi},$$

*) Laguerre, loc. cit.

Digitized by Google

qui vérifie l'équation différentielle

$$(z^2 + 1)\frac{d.Z(z)}{dz} = Z(z);$$

*le développement converge dans tout le plan, sauf sur la coupure rectiligne joignant les points* $\pm i$.

2° $$Z(z) = \log\frac{1+z}{1-z},$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$(1+z)(1-z)\frac{d.Z(z)}{dz} = 2;$$

*le développement converge dans tout le plan, sauf sur la coupure joignant les points* $\pm 1$.

3° $$Z(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\omega},$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$(1-z^2)\frac{d.Z(z)}{dz} = 2\omega.Z(z);$$

*le développement converge dans tout le plan, sauf sur la coupure rectiligne joignant les points* $\pm 1$.

### V. — Étude des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(az+b)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z).$$

44. Cette équation est un cas particulier de l'équation étudiée par Laguerre où l'on ferait $c = 0$, $d = 1$. Mais la relation de récurrence devient

$$U_{n+1} - (pz + an + q)U_n + n(na^2 - bp + aq)U_{n-1} = 0,$$
$$V_{n+1} - (pz + an + q)V_n + n(na^2 - bp + aq)V_{n-1} = 0,$$

et nous avons à étudier le rapport

$$R = \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n} \times n(na^2 - bp + aq),$$

Digitized by Google

posant

$$an\frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

$$R = \frac{na^2 - bp + aq}{a^2(n-1)} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

et la relation entre les polynômes $V_n$ devient

$$\frac{na^2 - bp + aq}{a^2(n-1)} u_{n-1} - \frac{pz + an + q}{a(n-1)} u_n + u_{n+1} = 0;$$

l'équation en $\alpha$ est ici

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0,$$

d'où $\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ et $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$ : quelque soit $z$. *Il y a doute sur la convergence.*

45. A ces fonctions se rattache la fonction :

$$Z(z) = e^z \int_z^\infty \frac{e^{-z} dz}{z},$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$z\frac{d.Z(z)}{dz} = z.Z(z) - 1$$

et dont LAGUERRE a donné le développement.

STIELTJES a montré *) que son développement converge dans tout le plan de la variable sauf sur la coupure constituée par la partie négative réelle de l'axe des $x$.

*) STIELTJES, loc. cit., page 5.

Digitized by Google

## CHAPITRE IV.

**Étude de la convergence d'une suite de fractions rationnelles $\frac{U_{p+n}}{V_n}$, $\left(\frac{U_n}{V_{p+n}}\right)$, dont les termes vérifient l'une des relations de récurrence**

$$A_h V_{p+n+1} + B_{h+1} U_{p+n} + \Pi(n)\chi^2 A_h U_{p+n-1} = 0,$$
$$A_h V_{n+1} + B_{h+1} V_n + \Pi(n)\chi^2 A_h V_{n-1} = 0,$$
$$A_h U_{n+1} + B_{h+1} U_n + \Pi(n)\chi^2 A_h U_{n-1} = 0,$$
$$A_h V_{q+n+1} + B_{h+1} V_{q+n} + \Pi(n)\chi^2 A_h V_{n-1} = 0,$$

**$A_h$, $B_{h+1}$ étant des polynômes $\chi$ de degrés respectifs $h$ et $h+1$, et $A_h$, $B_{h+1}$, $\Pi(n)$ étant fonctions de $n$ *).**

### I. — Préliminaires.

46. Dans l'un et l'autre cas, nous avons à étudier une série

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots + \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$
$$+ \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right) + \cdots$$

et le rapport

$$R_n = \chi^2 \Pi(n) \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n},$$

où

(1) $$A_h V_{n+1} + B_{h+1} V_n + \Pi(n)\chi^2 A_h V_{n-1} = 0.$$

Ici,

$$R_n = \left(\sqrt{\Pi(n)}\chi \frac{V_n}{V_{n+1}}\right) \times \left(\sqrt{\Pi(n-1)}\chi \frac{V_{n-1}}{V_n}\right) \times \sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}}$$

et

$$\sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}}\left(\sqrt{\Pi(n)}\chi \frac{V_n}{V_{n+1}}\right)\left(\sqrt{\Pi(n-1)}\chi \frac{V_{n-1}}{V_n}\right)$$
$$+ \frac{B_{h+1}}{\chi\sqrt{\Pi(n)}A_n}\left(\chi\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}\right) + 1 = 0.$$

---

*) Cf. Pincherle, Acta Mathematica, tome XVI.

Digitized by Google

Posant

$$\sqrt{\Pi(n)}\chi\frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

il vient

$$R_n = \sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

$$\sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{B_{b+1}}{\chi\sqrt{\Pi(n)}A_b} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} + 1 = 0.$$

Si $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ tend vers une limite $L$ et si $\sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}}$ tend vers $un$, $R_n$ tend vers $L^2$ et l'on a

$$L^2 + \lim \frac{B_{b-1}}{\chi\sqrt{\Pi(n)}A_b} L + 1 = 0.$$

Trois cas sont à examiner :

I. $\frac{B_{b+1}}{\chi A_b\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers une limite déterminée,

II. $\frac{B_{b+1}}{\chi A_b\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers zéro,

III. $\frac{B_{b+1}}{\chi A_b\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini.

## II. — Premier cas.

47. Si $\frac{B_{b+1}}{\chi A_b \Pi(n)}$ tend vers une limite déterminée, nous admettrons que $B$ et $A$ sont des polynômes en $\chi$ et $n$; nous admettrons aussi que $\Pi(n)$ est un polynôme en $n$. Le cas où $A$, $B$, $\Pi$ sont des fractions rationnelles en $n$ se ramène sans difficulté au cas précédent, comme on le verra sur un exemple.

I. $A_b$ et $B_{b+1}$ sont d'un même degré $k$ en $n$; alors $\Pi(n)$ se réduit à une constante $\omega$ :

$$R_n = \omega\chi^2\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}$$

et

$$A_k(n)V_{n+1} + B_k(n)V_n + \omega\chi^2 A_k(n)V_{n-1} = 0.$$

Digitized by Google

L'analyse que nous avons faite à propos des *fractions complémentaires* peut se répéter mot pour mot et si

$$A_k(n) = An^k + A_1 n^{k-1} + \cdots,$$

$$B_k(n) = Bm^k + B_1 m^{k-1} + \cdots,$$

on est conduit à examiner l'équation

$$\omega z^2 A\alpha^2 + B\alpha + A = 0.$$

*Si les modules des racines* $\alpha_1$, $\alpha_2$ *sont inégaux* ($|\alpha_1| < |\alpha_2|$),

$$\lim R = \omega z^2 \lim \left(\frac{V_n}{V_{n+1}}\right)^2 = \omega z^2 \alpha_1^2 < \omega z^2 \alpha_1 \alpha_2;$$

or

$$\omega z^2 \alpha_1 \alpha_2 = 1,$$

donc

$$\lim |R| < 1,$$

*et il y a convergence.*

48. *Conditions d'égalité des modules.*

L'équation en $\alpha$ peut s'écrire

$$(\sqrt{\omega} z\alpha)^2 + \frac{B}{A\sqrt{\omega} z}(\sqrt{\omega} z\alpha) + 1 = 0.$$

Soit

$$\frac{R}{A\sqrt{\omega}} = -2[P(x, y) + iQ(x, y)],$$

d'où

$$\frac{B}{A\sqrt{\omega} z} = -2\frac{(P+iQ)(x+iy)}{x^2+y^2} = -2\left(\frac{Px-Qy}{x^2+y^2} + i\frac{Py+Qx}{x^2+y^2}\right);$$

l'égalité des modules aura lieu sous condition que

$$Py + Qx = 0,$$

$$-1 < \frac{Px-Qy}{x^2+y^2} < 1.$$

II. Si $B_{h+1}$, $A_h$ sont respectivement de degrés $m$ et $k$ en $n$, $\Pi(n)$ sera de degré $2(k-m)$ et ce cas se ramènera au précédent, comme cela avait lieu pour les fractions complémentaires.

Digitized by Google

### III. — Second et troisième cas.

49. Comme pour les fractions complémentaires, si $\frac{B_{b+1}}{A_b z \sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini, il y a lieu de faire une étude particulière de chaque cas. Si $\frac{B_{b+1}}{A_b \Pi(n)}$ tend vers zéro, il y a doute.

### IV. — Application.

50. Revenons à l'équation

$$(az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z)$$

et à son développement, défini par les relations de récurrence

$$A_b U_{n+1} + B_{b+1} U_n + \Pi(n) A_b U_{n-1} = 0,$$

$$A_b V_{n+1} + B_{b+1} V_n + \Pi(n) A_b V_{n-1} = 0,$$

$$A_b = 1,$$

$$B_{b+1} = -\{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]z + (ad+bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq\} \times$$
$$\times \frac{(2n+1)ac+p}{[2(n+1)ac+p][2nac+p]},$$

$$\Pi(n) = \frac{n(nac+p)[n(ad-bc)a-bp+aq][n(ad-bc)c-cq+pd]}{(2nac+p)^2}.$$

Nous savons

1° que ce développement converge dans tous le plan de la variable $z$, sauf sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes $-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$;

2° que les relations de récurrence

$$A_{b,1} U_{n+1,1} + B_{b+1,1} U_{n,1} + z^2 \Pi(n) A_{b,1} U_{n-1,1} = 0,$$

$$A_{b,1} V_{n+1,1} + B_{b+1,1} V_{n,1} + z^2 \Pi(n) A_{b,1} V_{n-1,1} = 0,$$

Digitized by Google

où

$$A_{b,1} = A_n,$$

$$B_{b+1,1} = \zeta B_{b+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]$$
$$+[(ad-bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq]\zeta\}\frac{(2n+1)ac+p}{[2(n+1)ac+p]\times[2nac+p]},$$

$$\Pi(n) = \frac{n(nac-p)[n(ad-bc)a-bp+aq][n(ad-bc)c-cq+pd]}{(2nac+p)^2},$$

définissent des fractions $\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$ représentant la fonction dans tout le plan de la variable $\zeta$ sauf sur la coupure circulaire joignant les points transformés de

$$\zeta = -\frac{b}{a}, \qquad \zeta = -\frac{d}{c}$$

par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant l'origine et la puissance étant *un*, le segment circulaire en question faisant partie d'un cercle passant par le point $\zeta = 0$, mais ne contenant pas le point $\zeta = 0$, ce qui le définit sans ambiguité.

51. On peut retrouver ce dernier résultat directement.

On a en effet à étudier l'équation

$$\zeta^2\frac{ad-bc}{2}\alpha^2 - 2\left(ac+\frac{ad+bc}{2}\zeta\right)\alpha + \frac{ad-bc}{2} = 0$$

et le rapport

$$R = \zeta^2\frac{w_n}{w_{n+1}}\times\frac{w_{n-1}}{w_n},$$

et l'on peut leur substituer le rapport

$$R = \frac{u_n}{u_{n+1}}\times\frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et l'équation

$$(\zeta\alpha)^2 - 2\frac{dc+\frac{ad+bc}{2}\zeta}{\zeta\frac{ad+bc}{2}}(\zeta\alpha) + 1 = 0.$$



Digitized by Google

L'égalité des modules a lieu sous condition que

$$N = 0, \qquad -1 < M < 1;$$

si

$$\frac{ac + \frac{ad+bc}{2}z}{z \times \frac{ad-bc}{2}} = M + Ni,$$

posant

$$ac = \Pi_1 + \Pi_2 i,$$

$$ad + bc = 2\chi_1 + 2\chi_2 i,$$

$$ad - bc = 2\rho_1 + 2\rho_2 i,$$

il vient

$$M = \frac{(\chi_1\rho_1 + \chi_2\rho_2)(x^2+y^2) + (\pi_1\rho_1 + \Pi_2\rho_2)x + (\pi_2\rho_1 - \pi_1\rho_2)y}{(x^2+y^2)(\rho_1^2+\rho_2^2)},$$

$$N = \frac{(\chi_2\rho_1 - \chi_1\rho_2)(x^2+y^2) + (\Pi_2\rho_1 - \pi_1\rho_2)x - (\pi_1\rho_1 + \Pi_2\rho_2)y}{(x^2+y^2)(\rho_1^2+\rho_2^2)}.$$

Si l'on change $z$ en $\frac{1}{z}$, les conditions

$$-1 < M < 1, \qquad N = 0$$

deviennent

$$\frac{\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1}{\rho_1} = \frac{\Pi_1 y + \Pi_2 x + \chi_2}{\rho_2}$$

$$-1 \leqq \frac{(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_2 x - \Pi_1 y + \chi_2)\rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \leqq 1;$$

conditions qui, nous l'avons vu, s'interprètent comme il suit : le point $z$ doit être sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes

$$-\frac{b}{a}, \qquad -\frac{d}{c};$$

donc les conditions

$$-1 < M < 1, \qquad N = 0$$

équivalent à celle-ci : *le point $z$ doit être sur le segment circulaire transformé par rayons vecteurs réciproques du segment rectiligne précédemment considéré, le pôle de transformation étant le point $z = 0$ et le module de la transformation étant un. En ce cas, et en ce cas seulement, la fraction continue considérée divergera.*

---

Digitized by Google

# TROISIÈME PARTIE.

## EXTENSIONS DIVERSES.

52. La méthode employée aux n$^{os}$ 37 et 38 suppose simplement que les termes de 3 réduites consécutives

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}, \qquad \frac{U_n}{V_n}, \qquad \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}},$$

soient liés par des relations de récurrence

$$A(n).U_{n+1} + B(n).U_n + C(n).U_{n-1} = 0,$$
$$A(n).V_{n+1} + B(n).V_n + C(n).V_{n-1} = 0,$$

où $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ sont des polynômes en $n$ et $z$ qu'on suppose (n° 38) d'un même degré en $n$.

Si l'équation

$$A(n) + B(n).\alpha + C(n).\alpha^2 = 0$$

*prend pour n infini la forme*

$$A + B\alpha + C\alpha^2 = 0,$$

que nous écrirons

$$\alpha^2 - 2(p + qi)\alpha + 1 = 0,$$

*il ne saurait y avoir doute sur la convergence de la fraction continue hors du cas où les modules des racines $\alpha_1$, $\alpha_2$ de cette équation sont égaux*: ce qui suppose les relations $q = 0$, $p^2 < 1$.

53. Souvent, la région où la convergence apparaît comme douteuse est région de divergence. Nous l'avons vu à propos des fractions con-

Digitized by Google

tinues de LAGUERRE et nous le verrons encore à propos de la plupart des fractions que nous allons étudier.

J'observe :

1° *Que sans doute il n'existe pas plus pour les fractions continues que pour les séries des caractères absolus de convergence.*

2° *Que les aires de convergence douteuse que donne la méthode sont formées pour l'ordinaire d'arcs de courbes, ainsi que le veulent les conditions générales*

$$p^2 < 1, \qquad q = 0;$$

pour ce motif, *les fractions continues réalisent en général le prolongement analytique.*

3° Que la représentation par fractions continues introduit des coupures et renseigne par cela même sur les singularités des fonctions étudiées, ce que ne fait pas le mode de représentation le plus général connu jusqu'ici, je veux dire le développement en séries de polynômes de M. MITTAG-LEFFLER.

54. 1° Je rappelle ici que les termes des réduites $\frac{U_n}{V_n}$ d'une fractions continue

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

vérifient les relations de récurrence

$$U_{n+1} - b_{n+1} U_n - a_{n+1} U_{n-1} = 0,$$

$$V_{n+1} - b_{n+1} V_n - a_{n+1} V_{n-1} = 0.$$

2° Je ferai souvent usage de l'une des transformations que voici. On a identiquement :

$$\frac{p}{1 + \frac{q}{1 + r}} = p - \frac{pq}{1 + q + r};$$

appliquant cette identité à la fraction continue

Digitized by Google

$$F = \cfrac{\xi}{1 + \cfrac{\xi'}{1 + \cfrac{\xi''}{1 + \cdots}}}$$

il vient

$$F = \xi - \cfrac{\xi\xi'}{1 + \xi' + \xi'' - \cfrac{\xi''\xi'''}{1 + \xi''' + \xi^{IV} - \cfrac{\xi^{IV}\xi^{V}}{1 + \xi^{V} + \xi^{VI} - \cfrac{\xi^{VI}\xi^{VII}}{1 + \cdots}}}}$$

appliquant la même identité à la fraction continue

$$G = \cfrac{\xi'}{1 + \cfrac{\xi''}{1 + \cfrac{\xi'''}{1 + \cdots}}}$$

il vient

$$F = \frac{\xi}{1 + G} = \cfrac{\xi}{1 + \xi' - \cfrac{\xi'\xi''}{1 + \xi'' + \xi''' - \cfrac{\xi'''\xi^{IV}}{1 + \xi^{IV} + \xi^{V} + \cfrac{\xi^{V}\xi^{VI}}{1 + \cdots}}}}$$

## I. — Les fractions continues de Gauss *).

55. Gauss a donné le développement

$$\log(1 + z) = z \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}z}{1 + \cfrac{\frac{1}{6}z}{1 + \cfrac{\frac{2}{6}z}{1 + \cfrac{\frac{2}{10}z}{1 + \cdots}}}}}$$

*) Gauss, *Gesammelte Werke*, Tome III, page 125 et suiv.

Digitized by Google

où

$$a_1 = \tfrac{1}{2}\zeta \qquad a_2 = \tfrac{1}{6}\zeta$$

$$a_3 = \tfrac{2}{6}\zeta \qquad a_4 = \tfrac{2}{10}\zeta$$

$$a_5 = \tfrac{3}{10}\zeta \qquad a_6 = \tfrac{3}{14}\zeta$$

$$a_7 = \tfrac{4}{14}\zeta \qquad \ldots$$

$$\ldots$$

et, en général,

$$a_n = \frac{\frac{n+1}{2}}{2n}\zeta \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{\frac{n}{2}}{2(n+1)}\zeta \cos \frac{2n\pi}{2},$$

$$b_n = 1;$$

cette loi n'étant pas algébrique, nous ne pouvons appliquer notre méthode.

Or, si $t = \frac{1}{\zeta}$, on a, en général

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_0\zeta}{1 + \cfrac{a_1\zeta}{1 + \cfrac{a_2\zeta}{1 + \ddots}}}} = \cfrac{t}{t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \ddots}}}}$$

et, vu l'identité

$$t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{\lambda}} = t + a_0 - \frac{a_0 a_1}{a_1 + \lambda},$$

$$G = \cfrac{t}{t + a_0 - \cfrac{a_0 a_1}{t + a_1 + a_2 + \cfrac{a_2 a_3}{t + a_3 + a_4 - \cfrac{a_4 a_5}{\ddots}}}},$$

d'où

Digitized by Google

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\log(1+z) = \log\left(1+\frac{1}{t}\right) \\ &= \cfrac{1}{t+\frac{1}{2}-\cfrac{\frac{1.1}{2.6}}{t+\frac{1}{6}+\frac{2}{10}-\cfrac{\frac{2.2}{6.10}}{t+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}-\cfrac{\frac{3}{10}+\frac{3}{14}}{\ddots}}}} \end{aligned}\right. ;$$

ici,

$$a_2 = -\frac{1.1}{2.6}, \qquad a_3 = -\frac{2.2}{6.10}, \qquad a_4 = -\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{14}, \ldots$$

$$b_n = t + \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$U_{n+1} - \left(t+\frac{1}{2}\right)U_n + \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)}U_{n-1} = 0,$$

$$V_{n+1} - \left(t+\frac{1}{2}\right)V_n + \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)}V_{n-1} = 0.$$

Rappelons, *une fois pour toutes,* la suite des calculs.

Je considère la série

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots,$$

qui converge et diverge en même temps que la suite des réduites.

Si le rapport

$$R_n = \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right) : \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1}}{U_nV_{n-1} - U_{n-1}V_n} \times \frac{V_nV_{n-1}}{V_{n+1}V_n} = \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)}\frac{V_nV_{n-1}}{V_{n+1}V_n},$$

où les fonctions $V_{n+1}$, $V_n$, $V_{n-1}$ sont liées par la relation

$$V_{n+1} - \left(t+\frac{1}{2}\right)V_n + \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)}V_{n-1} = 0$$

Digitized by Google

ou

$$\frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} \times \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n} - \left(t + \frac{1}{2}\right)\frac{V_n}{V_{n+1}} + 1 = 0,$$

tend vers une limite moindre que *un*, il y a convergence.

Or, si les modules des racines de l'équation

$$(2) \qquad \tfrac{1}{16}\alpha^2 - \left(t + \tfrac{1}{2}\right)\alpha + 1 = 0$$

obtenue en faisant *n infini* et $\frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{V_{n-1}}{V_n} = \alpha$ dans l'équation précédente *sont inégaux*, la limite est moindre que *un*, il y a convergence. Si ces *modules sont égaux*, ce qui nécessite que l'équation étant écrite

$$\alpha^2 - 2(p + qi)\alpha + 1 = 0$$

on ait

$$q = 0, \qquad p^2 < 1,$$

et seulement dans ce cas, il y a doute sur la convergence.

Dans le cas présent, l'équation en $\alpha$ peut s'écrire

$$\left(\tfrac{1}{4}\alpha\right)^2 - 2(2t + 1) \times \left(\tfrac{1}{4}\alpha\right) + 1 = 0$$

et les modules des racines de cette équation sont égaux en même temps que les modules des racines de l'équation (1). Il y a donc doute sur la convergence quand

$$2t + 1 = \frac{2(x - iy)}{x^2 + y^2} + 1 = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1 - \frac{2iy}{x^2 + y^2};$$

ce qui donne lieu aux relations

$$y = 0, \qquad -1 < \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1 < 1$$

et cela a lieu si la variable $z$ a une *valeur réelle négative moindre que un*:

Le point $z = -1$ étant point singulier pour la fonction

$$\log(1 + z)$$

la coupure est lieu de divergence certaine et *la fraction continue* (1) *représente la fonction dans tout le plan de la variable* $z$, *sauf sur la coupure allant sur* $Ox$ *du point* $-1$ *à* $-\infty$.

Digitized by Google

56. Gauss a donné aussi le développement

$$(3)\qquad \log\frac{1+z}{1-z} = \cfrac{2z}{1 - \cfrac{\frac{1.1}{1.3}z^2}{1 - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}z^2}{1 - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}z^2}{1 - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}z^2}{1 - \ddots}}}}}$$

Ici,

$$a_n = -\frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)},$$

$$b_n = 1,$$

et nous avons à étudier l'équation

$$1 - \alpha + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} z^2 \alpha^2 = 0,$$

que nous écrirons

$$\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{z\alpha}{2}\right)^2 - \frac{2}{z}\left(\frac{z\alpha}{2}\right) + 1 = 0,$$

et qui devient à la limite

$$\left(\frac{z\alpha}{2}\right)^2 - 2\frac{x-iy}{x^2+y^2}\left(\frac{z\alpha}{2}\right) + 1 = 0.$$

La région de convergence douteuse est définie par les relations

$$y = 0, \qquad -1 < \frac{x}{x^2+y^2} < 1,$$

où

$$y = 0, \quad -x^2 < x < x^2 \; c.a.d. \; x(x-1) > 0 \quad \text{avec} \quad x(x+1) > 0$$

et comprend la partie de l'axe des $x$ extérieure au segment $-1, +1$.



Digitized by Google

Les points $-1$, $+1$ étant points singuliers logarithmiques de la fonction, la région de convergence douteuse est région de divergence certaine et

*La fraction continue* (3) *représente la fonction* $\log\frac{1+z}{1-z}$ *dans tout le plan de la variable* $z$, *sauf sur les coupures allant sur* $Ox$ *du point* $+1$ *au point* $+\infty$ *et du point* $-1$ *au point* $-\infty$.

57. Ces fractions continues dérivent d'une fraction continue beaucoup plus générale donnée par Gauss et que je vais maintenant étudier.

Si

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}z^2$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3 + \cdots$$

représente la série *hypergéométrique*, Gauss a montré que la fonction

$$G = \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, z)}{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}$$

admet le développement en fraction continue

$$(4) \qquad G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_0 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \cfrac{a_3 z}{1 + \ddots}}}}},$$

où

$$-a_0 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \qquad -a_1 = \frac{(\beta+1)(\gamma+\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$-a_2 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \qquad -a_3 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

$$-a_4 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+\rho)}, \qquad -a_5 = \frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)}, \quad \cdots$$

et, en général,

Digitized by Google

$$-a_n = \frac{\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\right)\left(\gamma - \beta + \frac{n-1}{2}\right)\cos\frac{2n\pi}{2}}{(\gamma + n - 1)(\gamma + n)}$$
$$+ \frac{\left(\beta + \frac{n}{2}\right)\left(\gamma - \alpha + \frac{n}{2}\right)\sin\frac{2n\pi}{2}}{(\gamma + n - 1)(\gamma + n)}.$$

La forme transcendante de cette expression ne nous permet pas d'employer la méthode indiquée et, pour ce motif, nous allons transformer la fraction continue.

On peut écrire, en posant $t = \frac{1}{z}$,

$$G = \cfrac{t}{1 + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{t + \ddots}}}}}$$

et, vu

$$t + \frac{a_0}{1 + \frac{a_1}{\lambda}} = t + a_0 - \frac{a_0 a_1}{a_1 + \lambda},$$

$$G = \cfrac{t}{t + a_0 - \cfrac{a_0 a_1}{t + a_1 + a_2 - \cfrac{a_2 a_3}{t + a_3 + a_4 - \cfrac{a_4 a_5}{\ddots}}}}$$

d'où

$$A_n = -\frac{(\alpha + n - 2)(\gamma - \beta + n - 2)(\beta + n - 1)(\gamma - \alpha + n - 1)}{(\gamma + 2n - 4)(\gamma + 2n - 3)^2(\gamma + 2n - 2)}$$

$$B_n = t - \frac{(\beta + n - 1)(\gamma - \alpha + n - 1)}{(\gamma + 2n - 3)(\gamma + 2n - 2)} - \frac{(\alpha + n - 1)(\gamma - \beta + n - 1)}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n - 1)}$$

avec

$$V_{n+1} - B_n V_n - A_n V_{n-1} = 0$$

Digitized by Google

ou

$$-A_n\alpha^2 - B_n\alpha + 1 = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$-16A_n\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 4B_n\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 1 = 0.$$

Passant à la limite,

$$\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 4\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 2\left[2\frac{x - iy}{x^2 + y^2} - 1\right]\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 1 = 0.$$

Les conditions d'égalité des modules sont

$$Y = 0, \quad -1 < \frac{2x}{x^2 + y^2} - 1 < 1:$$

le point $z$ doit se trouver sur la partie de l'axe des $x$ située *à droite du point un*. Le point $z = 1$ étant le seul point singulier de la fonction, *la fraction continue transformée représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la coupure allant du point $x = 1$ au point $x = \infty$.*

58. Si dans la formule (4) on fait $\beta = 0$ et qu'on change $\gamma$ en $\gamma - 1$, l'identité

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = 1$$

montre que le développement donné devient celui de la fonction

$$F(\alpha, 1, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma.(\gamma+1)}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3 + \cdots$$

*Ce développement est donc valable dans tout le plan, sauf sur la coupure $+1, +\infty$.*

*Cas particuliers:*

1° $$(t + u)^\omega = t^\omega F\left(-\omega, \beta, \beta, -\frac{u}{t}\right);$$

donc

$$(1 - z)^\omega = F(-\omega, 1, 1, z)$$

Digitized by Google

*et le développement correspondant sera valable dans tout le plan, exceptée la coupure indiquée.*

2° Il en est de même des fractions continues

$$\frac{\frac{2}{3\rho}z^2}{\frac{2}{3\rho}z + F\left(3, 1, \frac{\rho}{2}, z\right)}, \qquad \frac{1}{G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, z\right)},$$

rencontrées par GAUSS dans sa « *Theoria motus corporum cœlestium,* etc. ».

3° La fraction continue

$$\frac{F(s, i+s, i+1, z^2)}{F(s, i+s-1, i, z^2)}$$

étudiée par TISSERAND *) *converge dans tout le plan de la variable* $z$ *sauf sur les segments* $+1$ *à* $+\infty$, $-1$ *à* $-\infty$ *de l'axe des* $x$.

## II. — Les fractions continues de Lagrange.

59. LAGRANGE a donné le développement de la fonction

$$Z(z) = \int \frac{dz}{1+z^\omega} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{\xi_1 z^\omega}{1 + \cfrac{\xi_2 z^\omega}{1 + \cfrac{\xi_3 z^\omega}{1 + \ddots}}}},$$

où

$$\xi_1 = \frac{z^\omega}{\omega+1},$$

$$\xi_2 = \frac{\omega^2}{(\omega+1)(2\omega+1)} z^\omega, \qquad \xi_3 = \frac{(\omega+1)^2}{(2\omega+1)(3\omega+1)} z^\omega,$$

$$\xi_4 = \frac{(2\omega)^2}{(3\omega+1)(4\omega+1)} z^\omega, \qquad \xi_5 = \frac{(2\omega+1)^2}{(4\omega+1)(5\omega+1)} z^\omega,$$

---

*) TISSERAND, *Mécanique céleste,* tome I, p. 283.

Digitized by Google

$$\xi_6 = \frac{(3\omega)^2}{(5\omega+1)(6\omega+1)}\zeta^{\omega}, \qquad \xi_7 = \frac{(3\omega+1)^2}{(6\omega+1)(7\omega+1)}\zeta^{\omega},$$

. . . . . .

$$\xi_{2n} = \frac{(n\omega)^2}{[(2n-1)\omega+1][(2n\omega+1)]}\zeta^{\omega}, \quad \xi_{2n+1} = \frac{(n\omega+1)^2}{(2n\omega+1)[(2n+1)\omega+1]}\zeta^{\omega}, \ldots;$$

usant d'une transformation déjà indiquée, nous écrirons cette fraction continue

$$\zeta - \cfrac{\xi_1\zeta^{\omega+1}}{1+(\xi_1+\xi_2)\zeta^{\omega} - \cfrac{\xi_2\xi_3\zeta^{2\omega}}{1+(\xi_3+\xi_4)\zeta^{\omega} - \cfrac{\xi_4\xi_5\zeta^{2\omega}}{\ddots}}}$$

$$= \zeta + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}}$$

et nous aurons ici

$$(5)\begin{cases} U_{n+1} - b_{n+1}U_n - a_{n+1}U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - b_{n+1}V_n - a_{n+1}V_{n-1} = 0, \\ a_{n+1} = -\dfrac{[(n-1)\omega+1]^2 n^2\omega^2\zeta^{2\omega}}{[2(n-1)\omega+1][(2n-1)\omega+1]^2(2n\omega+1)} \\ b_{n+1} = \left\{\dfrac{1}{\zeta^{\omega}} + \dfrac{n^2\omega^2}{[(2n-1)\omega+1][(2n\omega+1)]} + \dfrac{(n\omega+1)^2}{(2n\omega+1)[(2n+1)\omega+1]}\right\}\zeta^{\omega} \\ 1 - \left[\dfrac{1}{\zeta\omega} + \dfrac{1}{2}\right]\zeta^{\omega}\alpha + \dfrac{1}{16}\zeta^{2\omega}\alpha^2 = 0; \end{cases}$$

écrivant cette dernière équation

$$\left(\frac{\zeta^{\omega}}{4}\alpha\right)^2 - 2\left[\frac{2}{\zeta\omega} + 1\right]\left(\frac{\zeta^{\omega}}{4}\alpha\right) + 1 = 0,$$

si

$$\frac{2}{\zeta\omega} + 1 = p + qi,$$

Digitized by Google

les conditions de convergence douteuse seront, comme à l'ordinaire,

$$q = 0, \qquad p^2 < 1.$$

Nous allons examiner quelques cas particuliers.

60. 1° $\omega = 1$

$$Z(z) = \log(1 + z),$$

$$p = \frac{2x}{x^2} + 1, \qquad q = -\frac{2iy}{x^2 + y^2};$$

convergence douteuse sur la coupure allant du point $-1$ à $-\infty$: la *fraction continue* (5) *représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la coupure allant du point* $-1$ à $-\infty$.

61. 2° $\omega = 2$

$$Z(z) = \text{arc tang}\, z,$$

$$p = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad q = \frac{-2xy}{(x^2 + z^2)^2}.$$

Si $y = 0$, $p^2$ ne peut être moindre que *un*.

Si $x = 0$, la condition $p^2 < 1$ s'écrit $(y - 1)(y + 1) > 0$: *la fraction continue représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la partie de l'axe des y extérieure au segment* $\pm i$.

62. 3° $\omega = 3$

$$p + qi = \frac{2}{z^3} + 1 = \frac{2(x - iy)^3}{(x^2 + y^2)^3} + 1 = \frac{2(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^3} + 1 + i\frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2 + y^2)^3};$$

la condition $q = 0$ suppose

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 - 3x^2 = 0.$$

Si $y = 0$, la condition $p^2 < 1$ donne

$$-1 < \frac{2x}{x^2} + 1 < 1$$

ou

$$x < -1.$$

Digitized by Google

Si $y^2 = 3x^2$, la condition $p^2 < 1$ s'écrit

$$x > 0 \quad \text{avec} \quad x(8x^3 - 1) > 0.$$

*Les coupures suivent les droites* $y = \pm x\sqrt{3}$; *elles vont des points singuliers* $z = \sqrt[3]{-1}$ *à l'infini.*

*Le développement représente donc la fonction dans tout le plan, sauf sur les trois coupures définies.*

63. On peut traiter *directement* le cas de $n = 2$ :

$$y = \int \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arc\,tang} z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{\frac{z^2}{1.3}}{1 + \cfrac{\frac{4z^2}{3.5}}{1 + \cfrac{\frac{9z^2}{5.7}}{1 + \cfrac{\frac{16z^2}{7.9}}{1 + \ddots}}}}}$$

Ici

$$b_n = 1,$$

$$a_n = \frac{(n-1)^2 z^2}{(2n-3)(2n-1)},$$

et il est inutile de transformer la fraction continue.

L'équation en $\alpha$ est

$$1 - \alpha - \frac{z^2}{4}\alpha^2 = 0.$$

Nous l'écrirons

$$\left(\frac{z}{2} i\alpha\right)^2 - 2\frac{1}{zi}\left(\frac{z}{2} i\alpha\right) + 1 = 0$$

et sous cette forme on retrouve les coupures allant des points $\pm i$ à l'infini, suivant l'axe $Oy$.

Digitized by Google

*La fraction continue représente la fonction dans tout le plan, sauf sur les coupures joignant d'une part le point* $+i$ *au point* $+\infty$ *de l'axe des* $y$ *et d'autre part le point* $-i$ *au point* $-\infty$ *du même axe.*

64. On peut étudier *directement encore* le développement

$$(1+z)^{\omega} = 1 + \cfrac{\omega z}{1 + (1-\omega)\frac{z}{2} + \cfrac{\frac{\omega^2-1}{1\cdot 3}\cdot\frac{z^2}{4}}{1 + \frac{z}{2} + \cfrac{\frac{\omega^2-4}{3\cdot 5}\cdot\frac{z^2}{4}}{1 + \frac{z}{2} + \cfrac{\frac{\omega^2-9}{5\cdot 7}\cdot\frac{z^2}{4}}{1 + \frac{z}{2} + \ddots}}}}$$

Ici,

$$b_n = 1 + \frac{z}{2}$$

$$a_n = \frac{\omega^2 - n^2}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{z^2}{4}$$

et l'équation en $\alpha$ s'écrit

$$1 - \left(1 + \frac{z}{2}\right)\alpha + \frac{1}{16}z^2\alpha^2 = 0$$

ou

$$\left(\frac{z\alpha}{4}\right)^2 - \left(1 + \frac{z}{2}\right)\frac{4}{z}\left(\frac{z\alpha}{4}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{z\alpha}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{z} + 1\right)\left(\frac{z\alpha}{4}\right) + 1 = 0:$$

*Le développement représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la coupure suivant l'axe des* $x$ *allant du point* $-1$ *au point* $-\infty$.

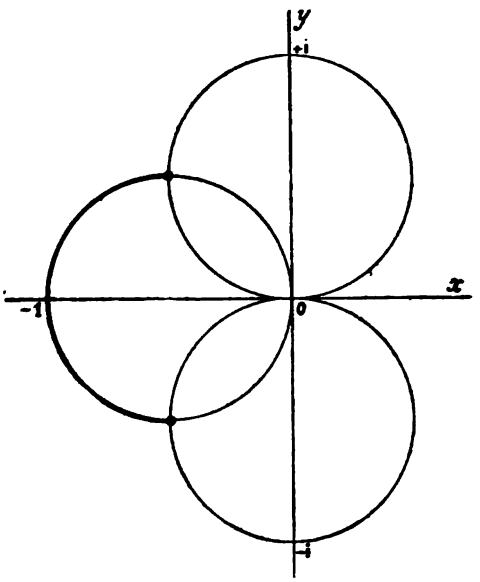
65. Étudions enfin le développement de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle

$$1 + 2\omega z . Z(z) - Z^2(z) + \Pi z^2 \frac{d.Z(z)}{dz} = 0:$$



Digitized by Google

$$Z(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\omega z}{1 + \cfrac{\frac{\omega - \Pi}{2} z}{1 - \cfrac{\frac{\omega + \Pi}{2} z}{1 + \cfrac{\frac{\omega - 2\Pi}{2} z}{1 - \cfrac{\frac{\omega + 2\Pi}{2} z}{1 + \cfrac{\frac{\omega - 3\Pi}{2} z}{\ddots}}}}}}}$$




*(Fig. 2).*

La transformation que nous avons déjà employée donnera lieu à l'équation

$$\alpha^2 + 2\left(\frac{1}{z} + 1\right)\alpha - 1 = 0,$$

qu'on écrira

$$(\alpha i)^2 - 2\left(\frac{1}{z} + 1\right)\frac{1}{i}(\alpha i) + 1 = 0$$

Digitized by Google

et nous avons à étudier l'expression

$$\frac{ix+y}{x^2+y^2}i;$$

il faut donc, pour la convergence, que

$$x^2+y^2+n=0$$

avec

$$-1<\frac{y}{x^2+y^2}<1,$$

ce qui suppose la coupure circulaire figurée ci-joint :
*Le développement converge dans tout le plan, sauf peut-être sur la coupure.*

Lille, 26 novembre 1904.

R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

Digitized by Google

Digitized by Google

# SECONDE THÈSE.

## PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Calcul des probabilités; théorie des erreurs.

*Vu et approuvé:*

Paris, le 20 février 1905.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer:*

Paris, le 20 février 1905.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

*Tipografia Matematica di Palermo*, 7, via Villareale. (428.1250.11 1/2) 30-3-1905.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

TIPOGRAFIA MATEMATICA DI PALERMO
428 Via Villareale, 7.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google